

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. LISTA 7.

UWAGA. Podpunkty oznaczone wykładnikiem \dot{z} są nie tyle trudne, co żmudne (nieco).

1. Znajdź (chyttrze) kres górny i kres dolny wartości funkcji na podanym zbiorze i wszystkie argumenty, w których te wartości są przyjmowane

a) $f(x, y) = 2^4 - x^2 - y^2 + x + 2y$, \mathbb{R}^2 b) $f(x, y) = |x-3| + |y-2|$, $[-5, 5]^2$

c) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^4 - x + 1}$, \mathbb{R}^2 d) na kole o śr. w (0,0) i pr. 9: d') $f(x, y) = |x+y|$

d'') $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 8y + 25}$ d''') $f(x, y) = 18x + 14y - x^2 - y^2$

e) $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$, $[-3, 2]^3$ f) $f(x, y) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{gd}y (x, y) \in [-1, 1]^2 \\ |y| + p & \text{gd}y (x, y) \notin [-1, 1]^2 \end{cases}$

2. Znajdź kres górny i kres dolny wartości funkcji f na podanym zbiorze W i wszystkie argumenty, w których te wartości są przyjmowane, gdy f jest dana wzorem

a) $x^3 + xy - 3x$, W jest ograniczony liniami $y = x^2$, $2x = y - 3$

b) $xy(4-x-y)$, $W =$ trójkąt o wierzchołkach (1, 0), (6, 0), (1, 5) b \dot{z}) $W = [-5, 5]^2$

c) $2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$, $W = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq 4\}$ c \dot{z}) $W = \{(x, y) : x^2 \leq y + 2 \leq 9\}$

d) $|x| + (x+y)^2 + y$, $W = \Delta(-1, 0)(1, 0)(0, 1)$ d \dot{z}) $W = \{(x, y) : |y| \leq 1 - |x|\}$

3. Znajdź $\sup f[D]$, $\inf f[D]$ i wszystkie argumenty z D , w których te kresy są przyjmowane, gdzie $D = \{(x, y) : x + y \leq 8 \wedge x, y > 0\}$ i f jest dana wzorem

a) $2xy - x^2y - xy^2$ b) $2xy + x^2y + xy^2$ c) $\ln(x+2y)$ d) $\ln(1+4x+y)$

4. Na pytanie o lokalne ekstrema funkcji $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5$ Wolfram podaje:

a) dla $D = \{(x, y) : 2x^4 + 3y^6 = 4\}$: min. lok. ≈ 1.02039 w (0.792942, -1, 01131); max. lok. ≈ 12.6149 w (-1.0155, 0.924497);

b) dla $D = \{(x, y) : 2x^4 + 3y^7 = 4\}$: min. lok. ≈ 1.04071 w (1.55133, -1, 14166); max. lok. ≈ 12.682 w (-1.03734, 0.92083).

Czy można (jeśli tak, to jak) wykorzystać te informacje dla pytań o kresy górne i dolne tej funkcji na podanych zbiorach?

5. Wyznacz punkt płaszczyzny $z = 0$, dla którego suma kwadratów odległości od punktów $A_1(5, 2, 1)$, $A_2(7, 3, 4)$, $A_3(-3, 1, 2)$ jest najmniejsza.

6. Niech $A(4, 0, 4)$, $B(4, 4, 4)$, $C(4, 4, 0)$. Na powierzchni $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ znajdź taki punkt S , by objętość ostrosłupa $SABC$ była a) najmniejsza b) największa.

ODPOWIEDZI do niektórych zadań:

2a) $\inf_W f = -\sqrt{2} = f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$, $\sup_W f = 45 = f(3, 9)$

2b) $\inf_W f = -18 = f(3, 3)$, $\sup_W f = \frac{64}{27} = f(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$

2b \dot{z}) $\inf_W f = -150 = f(5, 5)$, $\sup_W f = 350 = f(-5, -5)$

2c) $\inf_W f = 0 = f(0, 0)$, $\sup_W f = 32 = f(2, 4) = f(-2, 4)$

2c \dot{z}) $\inf_W f = 0 = f(0, 0)$, $\sup_W f = 97 = f(3, 7)$

3a) $\inf_D f = -96 = f(4, 4)$, $\sup_D f = \frac{8}{27} = f(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

3b) $\inf_D f = 0$, $\sup_D f = 160 = f(4, 4)$

3c) $\inf_D f = -\infty$, $\sup_D f = 4 \ln 2$

3d) $\inf_D f = 0$, $\sup_D f = 5 \ln 2$

5. (3, 2, 0)