ANALIZA MATEMATYCZNA 3. Wskazówki i rozwiązania niektórych zadań z Listy 8.

1. Wyznacz wartość najmniejszą i największą funkcji przy podanych warunkach.

a) $f(x,y)=2x^2+y^2+2y-3$

Rozwiązanie. Ponieważ $f(x,y)=2x^2+y^2+2y-3=2x^2+(y+1)^2-4$, więc $\inf\limits_{\mathbb{R}^2} f=2\cdot 0^2+0^2-4=f(0,-1)=-4$ oraz $\sup\limits_{\mathbb{R}^2} f=+\infty$, bo $f(n,0)=2n^2-3\xrightarrow{n\to\infty}+\infty$.

a") $f(x,y)=2x^2+y^2+2y-3$ gdy $x^2+y^2\le 4$

Rozwiązanie. Niech $g(x,y)=x^2+y^2-4$ i $W=\{(x,y):g(x,y)\le 0\}$.

0^o. W jest kołem, czyli zbiorem ograniczonym i domkniętym, więc z tw. Weierstrassa f osiąga kresy na W.

1^o. Punkty kryt. we wnętrzu W:

$$\begin{cases}4x&=0\\2y+2&=0\end{cases}\quad\begin{cases}x&=0\\y&=-1\end{cases}$$ i ten punkt $p_1=(0,-1)$ leży w wnętrzu koła W.

2^o. Punkty kryt. na brzegu W (tu $\nabla g=[2x,2y]\ne\vec{0}$, więc stosujemy mnożn. L.):

$$\begin{cases}4x=\lambda\cdot 2x\\2y+2=\lambda\cdot 2y\\x^2+y^2-4=0\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{cases}x=0\\0^2+y^2=4\end{cases}\text{lub}\begin{cases}\lambda=2\\2y+2=2\cdot 2y\\\ldots\end{cases}\right)\Rightarrow\left(\begin{cases}x=0\\y=\pm 2\end{cases}\text{lub}\begin{cases}y=1\\x=\pm\sqrt{3}\end{cases}\right)$$

Stąd na brzegu W są 4 p. kryt.: $p_2=(0,2)$, $p_3=(0,-2)$, $p_4=(\sqrt{3},1)$, $p_5=(-\sqrt{3},1)$.

3^o Z $0^o,1^o,2^o$, wśród wartości f w 5 p. kryt. znajdziemy w. najw. i najmniejszą:

$$f(0,-1)=\underset{\inf f[W]}{\underset{||}{-4}},\ f(0,2)=5,\ f(0,-2)=-3,\ f(\sqrt{3},1)=\underset{\sup f[W]}{\underset{||}{6}}=f(-\sqrt{3},1).$$

b) $f(x,y)=x^3+x^2+y^2/3$ gdy $x^2+y^2\le 36$

WSK.: Punkty krytyczne na okręgu: $(\pm 6,0),(0,\pm 6),(-\frac{4}{9},\pm\frac{10\sqrt{29}}{9})$.

d) $f(x,y)=16-x^2-4y^2$ gdy $x^4+2y^4\le 1$

WSK.: Punkty krytyczne na brzegu: $(\pm 1,0),(0,\pm\frac{1}{2^{1/4}}),(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}),(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$.

e) $f(x,y)=xy$ gdy $x^2+y^2=32$

Rozwiązanie. Warunek opisuje okrąg $W=\{(x,y):x^2+y^2-32=0\}$, czyli zbiór ograniczony i domknięty, więc z tw. Weierstrassa $f|_W$ osiąga swe kresy. Wnętrze W jest puste. Gradient warunku $[2x,2y]\ne\vec{0}$ na W, więc zastosujemy mnożniki L.:

$$\begin{cases}y=\lambda\cdot 2x\\x=\lambda\cdot 2y\\x^2+y^2=32\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{cases}x=0\\y=0\\0^2+0^2=32\end{cases}\text{lub}\begin{cases}\lambda=\frac{y}{2x}\\x=\frac{y}{2x}\cdot 2y\\x^2+y^2=32\end{cases}\right)\Rightarrow\begin{cases}x^2=y^2\\2x^2=32\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{cases}x=4\\y=\pm 4\end{cases}\text{lub}\begin{cases}x=-4\\y=\pm 4\end{cases}\right)$$

Stąd mamy cztery p.kryt.: $(4,4)$, $(4,-4)$, $(-4,4)$, $(-4,-4)$.

ODP.: $\inf f[W]=-16=f(4,-4)=f(-4,4)$, $\sup f[W]=16=f(4,4)=f(-4,-4)$.

f) $f(x,y) = 4x^2 + y^3 + 3y + 7$ gdy $2x^2 + \frac{3}{2}y^2 = \frac{3}{2}$

ODP. $\inf\{f(x,y) : 2x^2 + \frac{3}{2}y^2 = \frac{3}{2}\} = -4 = f(0,-1)$,

$\sup\{f(x,y) : 2x^2 + \frac{3}{2}y^2 = \frac{3}{2}\} = 4 = f(0,1)$.

g") WSK. badać najpierw funkcję $\hat{f}(x,y) = x^2 + y^4$. $\inf f|_{x^2+y^3=1} = f(\pm\frac{\sqrt{37}}{8}, \frac{3}{4})$

h) $f(x,y) = x^2 + (y+1)^2 + 3$ gdy $x^2 + y^2 = \pi$

Rozwiązanie. Dla punktów okręgu mamy: $f(x,y) = x^2 + (y+1)^2 + 3 = 2y + 4 + \pi$ i $-\sqrt{\pi} \le y \le \sqrt{\pi}$, więc $\inf\limits_{x^2+y^2=\pi} f = -2\sqrt{\pi} + 4 + \pi = f(0, -\sqrt{\pi})$, $\sup\limits_{x^2+y^2=\pi} f = 2\sqrt{\pi} + 4 + \pi = f(0, \sqrt{\pi})$.

2. Wyznacz wartość najmniejszą i największą funkcji przy podanych warunkach.

a) $f(x,y,z) = x + y + 3z$ gdy $x^2 + y^2 = 1$ i $x - y + z = 1$

WSK. p. kryt. $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}})$, $(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}})$

a") $f(x,y,z) = x + y + 3z$ gdy $x^2 + y^2 = z^2$ i $x - y + z = 1$

WSK. p. kryt. $(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(2, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$

c) $f(x,y,z) = xyz$ gdy $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$

Rozwiązanie. Warunki opisują okrąg W (przecięcie sfery i płaszczyzny), czyli zbiór zwarty, więc z tw. Weierstrassa $f|_W$ osiąga swe kresy. Gradienty warunków: $[2x, 2y, 2z]$, $[1,1,1]$ są liniowo zależne tylko gdy $x = y = z$, a takich punktów nie ma w W. Zatem można użyć metody mnożników Lagrange'a:

$$\begin{cases} yz = \lambda 2x + \mu \\ xz = \lambda 2y + \mu \\ xy = \lambda 2z + \mu \\ x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z(x-y) = \lambda 2(y-x) \\ x(y-z) = \lambda 2(z-y) \\ x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{cases} x = y \\ x + x + z = 0 \\ 2x^2 + (-2x)^2 = 1 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} \lambda = -\frac{z}{2} \\ x(y-z) = (-\frac{z}{2})2(z-y) \\ \ldots \\ \ldots \end{cases} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{cases} x = y \\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \\ z = -2x \end{cases} \text{lub} \begin{cases} y = z \\ \ldots \\ \ldots \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x = z \\ \ldots \\ \ldots \end{cases} \right)$$, czyli mamy 6 p. krytycznych, dla których:

$$f(\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, -\tfrac{2}{\sqrt{6}}) = f(-\tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}) = f(\tfrac{1}{\sqrt{6}}, -\tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}) = -\tfrac{2}{6\sqrt{6}} = \inf_W f,$$
$$f(-\tfrac{1}{\sqrt{6}}, -\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{2}{\sqrt{6}}) = f(\tfrac{2}{\sqrt{6}}, -\tfrac{1}{\sqrt{6}}, -\tfrac{1}{\sqrt{6}}) = f(-\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{2}{\sqrt{6}}, -\tfrac{1}{\sqrt{6}}) = \tfrac{2}{6\sqrt{6}} = \sup_W f.$$

c') $f(x,y,z) = xyz$ gdy $xy + yz + xz = -\frac{1}{2}$, $x + y + z = 0$

Rozwiązanie. Ponieważ $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz)$, więc zad.c' = zad.c.

e) $f(x,y,z) = y^3 + xz^2 \quad \text{gdy} \quad x^2+y^2+z^2=1$

Rozwiązanie. Warunek opisuje sferę W, czyli zbiór ograniczony i domknięty, więc z tw. Weierstrassa f osiąga kresy na W w pewnych punktach spełniających układ:

$$\begin{cases} z^2 = \lambda 2x \\ 3y^2 = \lambda 2y \\ 2xz = \lambda 2z \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \quad \underset{\text{II i III równ.}}{\text{analizując}} \quad \left(\begin{cases} y=0 \\ z=0 \text{ lub } x=\lambda \\ \dots \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} \lambda = \frac{3}{2}y \\ z=0 \text{ lub } x=\frac{3}{2}y \\ \dots \end{cases} \right)$$

$$\left(\begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ x=\pm 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} y=0 \\ z^2=2x^2 \\ 3x^2=1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} \lambda = \frac{3}{2}y \\ z=0 \\ 0^2=3yx \\ \dots \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} \lambda = \frac{3}{2}y \\ x=\frac{3}{2}y \\ z^2 = \frac{3}{2}y\cdot 2(\frac{3}{2}y) \\ \frac{9}{4}y^2+y^2+\frac{9}{2}y^2=1 \end{cases} \right) \text{ skąd}$$

$$\left(\begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ x=\pm 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} y=0 \\ z=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ x=\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} y=0 \\ z=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ x=-\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} z=0 \\ x=0 \\ y=\pm 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} z=0 \\ y=0 \\ x=\pm 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x=\frac{3}{\sqrt{31}} \\ z=\pm\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{31}} \\ y=\frac{2}{\sqrt{31}} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x=\frac{-3}{\sqrt{31}} \\ z=\pm\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{31}} \\ y=\frac{-2}{\sqrt{31}} \end{cases} \right)$$

Dalej wystarczy porównać wartości f w tych <u>12</u> punktach. Mamy:

$$f(\pm 1,0,0)=0, \quad \left| f(-\tfrac{1}{\sqrt{3}},0,\pm\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}) \right| = f(\tfrac{1}{\sqrt{3}},0,\pm\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}) = \tfrac{2}{3\sqrt{3}} < 1, \quad f(0,\pm 1,0)=\pm 1,$$

$$\left| f(\tfrac{-3}{\sqrt{31}},\tfrac{-2}{\sqrt{31}},\pm\tfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{31}}) \right| = f(\tfrac{3}{\sqrt{31}},\tfrac{2}{\sqrt{31}},\pm\tfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{31}}) = \tfrac{8}{31\sqrt{31}} + \tfrac{3}{\sqrt{31}}\cdot\tfrac{18}{31} = \tfrac{2}{\sqrt{31}} < 1.$$

Zatem $\inf\limits_W f = -1 = f(0,-1,0)$ i $\sup\limits_W f = 1 = f(0,1,0)$.