Analiza matematyczna 3. Lista 9.

Niektóre podpunkty można rozwiązać 'chytrze'. (P)odpowiedzi są na następnych stronach.

1. Czy podane równanie określa jednoznacznie funkcję uwikłaną $y = y(x)$ w pewnym otoczeniu podanego punktu? Znajdź równanie stycznej w tym punkcie.

a) $x^4y + xy^3 = 10,\ \ A=(1,2)$ **b)** $x^y = y^x,\ \ A=(2,4);\ B=(3,3);\ C=(2,5)$

c) $x^2+y^2 = 2xy,\ A=(1,1);\ B=(0,0)$ **d)** $x^4+y^4 = 2x^2y^2,\ A=(1,1);\ B=(0,0)$

e) $x^2+y^2= 2x,\ A=(1,1);\ B=(0,0)$ **f)** $x^2+y^2-x = 2xy,\ A=(1,0);\ B=(0,0)$

g) $x^3 - y^3 + x - y = 0,\ A=(p,p)$ **h)** $x^4 + y^4 = 2xy,\ A=(1,1);\ B=(0,0)$

2. Dla zadanej równaniem powierzchni znajdź równanie płaszczyzny stycznej do niej w podanym punkcie.

a) $x^2z + yz^2 - 2 = 0,\ A=(\sqrt{2},0,1)$ **b)** $e^{xz} = yz,\ A=(0,1,1);\ B=(1,e,1)$

c) $x^2+ y^3+ z^4 = x+z,\ \ A=(0,0,0);\ B=(1,0,0);\ C=(1,0,1)$

3. Oblicz pochodną dy/dx i drugą pochodną d^2y/dx^2 funkcji uwikłanej $y = y(x)$

a) $xe^y - y + 1 = 0$ **b)** $x^2 + y^2 = 3xy$ **c)** $x - y + e^x - e^y = 0$

4. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji uwikłanej $y = y(x)$ zadanej równaniem:

a) $x^2 + y^2 + 4y = xy + 2x$ **b)** $x^3 + y^3 = 12xy$ **c*)** $\ln\sqrt{x^2+ y^2} = \arctan\frac{y}{x}$

5. Wiedząc, że linia $B = \{(x, y) : x^4 + y^4 = 9xy\}$ wygląda jak przekręcona nieco ósemka, znajdź najmniejsze takie a, że $B \subseteq [-a, a]^2$.

(P)ODPOWIEDZI do niektórych zadań z listy 9.

1. b) styczne: $y = -4\frac{1-\ln 2}{2\ln 2-1}(x-2)+4,\ y = x$ w punktach $A,\ B$ (odpowiednio)

1. f) styczne: $2y+1 = x,\ x = 0$ w punktach $A,\ B$ (odpowiednio)

1. h) W B, dla $t \in (0,1]$ i dla $t \in [1,+\infty)$ rozważ linie: $p_t = \left(\sqrt{\frac{2t}{1+t^4}}, t\cdot\sqrt{\frac{2t}{1+t^4}}\right)$.

Jak leżą względem prostej $y = x$? Oblicz $\lim\limits_{t\to+\infty} p_t$ i $\lim\limits_{t\to 0^+} p_t$.

2. b) płaszczyzna(!) $y = ex$ jest styczna do powierzchni $e^{xz} = yz$ w punkcie $(1, e, 1)$

4 a) Odp. maks. lok. w $\left(\frac{2}{3}\sqrt{3},\ \frac{2}{3}(2\sqrt{3}-3)\right)$ i min. lok. w $\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3},\ -\frac{2}{3}(2\sqrt{3}+3)\right)$

4 b) Odp. maks. lok. w $\left(4\sqrt[3]{3},\ 4\sqrt[3]{9}\right)$

4 c) ROZWIĄZANIE

Funkcja $F = \ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$ jest określona dla $x \neq 0$ (poza osią OY).

Mamy: $F'_x = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$, $F'_y = \dfrac{y-x}{x^2+y^2}$ i $F''_{xx} = \dfrac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $F''_{yy} = \dfrac{x^2-y^2+2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

Szukamy p. kryt:

$$\begin{cases} -\frac{F'_x}{F'_y} = 0 \\ F = 0 \\ F'_y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F'_x = 0 \\ F = 0 \\ F'_y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ \ln(\sqrt{2}|x|) = -\frac{\pi}{4} \\ y \neq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ |x| = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\pi/4} \\ y \neq x \end{cases}$$

czyli mamy dwa punkty: $p_1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}e^{\pi/4}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}e^{\pi/4}}\right)$, $p_2 = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}e^{\pi/4}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}e^{\pi/4}}\right)$.

Dla nich $F''_{xx} = \dfrac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} > 0$, więc znak $-\dfrac{F''_{xx}}{F'_y}$ rozstrzyga jakie są w nich ekstrema: w p_1 min. lokalne, w p_2 maks. lokalne.

[*Niestety, to jeszcze nie koniec; to nie jest pełne rozwiązanie.*]

Tw. o funkcji uwikłanej nie rozstrzyga, jak to jest z punktami spelniającymi układ $\begin{cases} F'_y = 0 \\ F = 0 \end{cases}$, czyli z $q_1 = \left(\dfrac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}}, \dfrac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}}\right)$, $q_2 = \left(-\dfrac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}}, -\dfrac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}}\right)$.

Dla nich $F'_x \neq 0$, więc z dualnej wersji tw. o f. uwikłanej wiemy, że leżą na wykresach f. uwikłanych $x = x(y)$, które mają w tych punktach styczne $x = \dfrac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}}$, $x = -\dfrac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}}$.

Ponadto w nich $x''(y) \neq 0$ (bo $F''_{yy} = \dfrac{x^2-y^2+2xy}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \neq 0$), więc ich **wykresy leżą lokalnie po jednej stronie swych stycznych.**

Stąd już wynika, że w q_1 i w q_2 równanie $F = 0$ nie zadaje funkcji uwikłanej $y = y(x)$.

ODP. Równanie $F = 0$ zadaje funkcję uwikłaną $y = y(x)$, która ma ekstrema lokalne: minimum w $p_1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}e^{\pi/4}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}e^{\pi/4}}\right)$ i maksimum w $p_2 = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}e^{\pi/4}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}e^{\pi/4}}\right)$. □