

Objętość V_4 kuli czterowymiarowej $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \leq R^2$
(czterowymiarowa analogia objętości)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}V_4 &= \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} \, d\Omega = \\ &= \iint\limits_{x^2+y^2 \leq R^2} \left(\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \sqrt{\sqrt{R^2-x^2-y^2}^2 - z^2} \, dz \right) d\omega = \end{aligned}$$

zauważamy, że nawias to pole półkola, co można podać bez całkowania

$$= \iint\limits_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{1}{2}\pi \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}^2 \, d\omega =$$

i radośnie pędzimy do układu biegunowego (nie zapominając o jacobianie)

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{2}\pi(R^2 - r^2) \cdot r \, dr \, d\varphi = \quad \text{teraz 'świat już jest wielomianowy'}$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^R \frac{1}{2}\pi(R^2 r - r^3) \, dr = \pi^2 \cdot \left[\frac{1}{2}R^2 r^2 - \frac{1}{4}r^4 \right]_0^R = \frac{1}{4}\pi^2 R^4.$$

$$\text{Zatem } V_4 = \frac{1}{2}\pi^2 R^4.$$

Niech $V_n(R)$ oznacza n -objętość n wymiarowej kuli $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2$ zawartej w $\mathbb{R}^n$. Poniżej mamy pomysły na obliczenie $V_5(R)$:

(A) (kiepski)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}V_5(R) &= \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2+u^2 \leq R^2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2} \, d\Omega_4 = \\ &= \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \frac{1}{2}V_2(\sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}) \, d\Omega_3 = \dots \end{aligned}$$

(B) (dwa razy biegunowy)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}V_5(R) &= \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2+u^2 \leq R^2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2} \, d\Omega_4 = \\ &= \iint\limits_{x^2+y^2 \leq R^2} \left(\iint\limits_{z^2+u^2 \leq R^2-(x^2+y^2)} \sqrt{(R^2-x^2-y^2) - z^2 - u^2} \, d\omega \right) d\Omega_2 = \dots \end{aligned}$$

(C) (indukcyjny)

$$\begin{aligned} V_5(R) &= \iiint\limits_{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2 \leq R^2} 1 \, d\Omega_5 = \int_{-R}^R \left(\iiint\limits_{x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2 \leq R^2-x_1^2} 1 \, d\Omega_4 \right) dx_1 = \\ &= \int_{-R}^R \left(V_4 \left(\sqrt{R^2 - x_1^2} \right) \right) dx_1 = \int_{-R}^R \left(\frac{\pi^2}{2} (R^2 - x_1^2)^2 \right) dx_1 = \dots = \frac{8\pi^2}{15} R^5 \end{aligned}$$

Uwaga 1. Dla $n = 6$ warto zmodyfikować pomysł C (indukcyjny):

$$\begin{aligned} V_6(R) &= \iiint\limits_{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2 \leq R^2} 1 \, d\Omega_6 = \iint\limits_{x_1^2+x_2^2 \leq R^2} \left(\iiint\limits_{x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2 \leq R^2-(x_1^2+x_2^2)} 1 \, d\Omega_4 \right) d\omega_2 = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R V_4(\sqrt{R^2 - r^2}) \cdot r \, dr \, d\varphi = \dots = \frac{\pi^3}{6} R^6 \end{aligned}$$

Uwaga 2. Ogólnie: $V_{n+1}(R) = \int_{-R}^R V_n(x) \, dx$,

choć dla parzystych n wygodniej tak: $V_{n+2}(R) = \int\limits_{x_1^2+x_2^2 \leq R^2} V_n(\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}) \, d\omega_2$.

Uwaga 3. Jak widać, powyższe nie jest specjalnie trudne, ani... pasjonujące.

Dużo ciekawsze jest pytanie: **DLACZEGO tak można rachować?**

Czy może raczej: **CZYM jest objętość w $\mathbb{R}^4$? Jak ją zdefiniować?**

To temat raczej z teorii miary. Najkrócej: tak, by $[0, 1]^4$ miało objętość 1 oraz...