

AM3, k5, (A)

1. Niech D oznacza równoległobok o wierzchołkach $(3, 0)$, $(5, 0)$, $(2, 3)$, $(0, 3)$. Dla $n \in \mathbb{N}$ będziemy rozważać różne podziały ω_n zbioru D (na 'długie paski'). Dla funkcji $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ podaj różnicę sumy górnej i sumy dolnej dla podziału ω_n zbioru D , gdzie:

a) $f(x, y) = (x + y)^2$ i podział ω_n wyznaczają linie postaci $y = \frac{i}{n}$, $i \in \mathbb{Z}$

$$S_{\omega_n} - s_{\omega_n} = \dots$$

b) $f(x, y) = \sqrt{y}$ i podział ω_n wyznaczają linie postaci $y = \frac{i}{n}$, $i \in \mathbb{Z}$

$$S_{\omega_n} - s_{\omega_n} = \dots$$

c) $f(x, y) = (x + y)^2$ i podział ω_n wyznaczają linie postaci $y = -x + \frac{j}{n}$, $j \in \mathbb{Z}$

$$S_{\omega_n} - s_{\omega_n} = \dots$$

d) $f(x, y) = \sqrt{y}$ i podział ω_n wyznaczają linie postaci $y = -x + \frac{j}{n}$, $j \in \mathbb{Z}$

$$S_{\omega_n} - s_{\omega_n} = \dots$$

2. Zapisz całkę iterowaną podając granice całkownia (uważaj na kolejność!):

a') dla czworościanu C o wierzchołkach $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 5)$

$$\iiint_C g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dz dy dx \quad (\text{w ukł. kartezjańskim})$$

$$a = \dots \quad b = \dots \quad c = \dots \quad d = \dots \quad e = \dots \quad f = \dots$$

a'') dla czworościanu C o wierzchołkach $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 5)$

$$\iiint_C g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dx dy dz \quad (\text{w ukł. kartezjańskim})$$

$$a = \dots \quad b = \dots \quad c = \dots \quad d = \dots \quad e = \dots \quad f = \dots$$

b') $\iint_{\substack{x^2 + y^2 \leq 5^2 \\ y\sqrt{3} \geq x \geq 0}} g(x, y) d\omega = \int_a^b \int_c^d g(x, y) dy dx \quad (\text{w ukł. kartezjańskim})$

$$y\sqrt{3} \geq x \geq 0$$

$$a = \dots \quad b = \dots \quad c = \dots \quad d = \dots$$

b'') $\iint_{\substack{x^2 + y^2 \leq 5^2 \\ y\sqrt{3} \geq x \geq 0}} g(x, y) d\omega = \int_a^b \int_c^d g(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r dr d\varphi \quad (\text{w ukł. biegunowym})$

$$y\sqrt{3} \geq x \geq 0$$

$$a = \dots \quad b = \dots \quad c = \dots \quad d = \dots$$

c') dla zbioru C punktów (x, y) koła o środku $(\frac{5}{2}, 0)$ i pr. $\frac{5}{2}$, dla których $x + y \leq 0$

$$\iint_C g(x, y) d\omega = \int_a^b \int_c^d g(x, y) dy dx \quad (\text{w ukł. kartezjańskim})$$

$$a = \dots \quad b = \dots \quad c = \dots \quad d = \dots$$

c'') dla zbioru C punktów (x, y) koła o środku $(\frac{5}{2}, 0)$ i pr. $\frac{5}{2}$, dla których $x + y \leq 0$

$$\iint_C g(x, y) d\omega = \int_a^b \int_c^d g(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r dr d\varphi \quad (\text{w ukł. biegunowym})$$

$$a = \dots \quad b = \dots \quad c = \dots \quad d = \dots$$

3. Niech $S = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 3 - x^2 - y^2\}$. Znajdź takie $p \in \mathbb{R}$, że płaszczyzna $z = p$ dzieli S na dwie części o jednakowych objętościach. (Przedstaw pełne rozwiązanie.)

...

()

Proszę o samodzielną pracę, bez elektroniki. (Punktacja: 13+13+14p.)

‘Podaj’ = ‘podaj, bez uzasadnienia’, po uproszczeniu do ‘elegantkiej’ postaci.

Tu jest miejsce na ciąg dalszy rozwiązania zadania 3.