

AM3, k6, (A)

1. Zapisz całkę iterowaną **podając** wyrażenia a, b, c, d, e, f (uważaj na kolejność!)

a) dla kuli A o środku $(0,0,5)$ i promieniu 3

$$\mathbf{a'}) \quad \iiint_A g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dz dy dx \quad (\text{w ukł. kartezj.})$$

$$a = -3 \quad b = 3 \quad c = -\sqrt{3^2 - x^2} \quad d = \sqrt{3^2 - x^2} \quad e = 5 - \sqrt{3^2 - x^2 - y^2} \\ f = 5 + \sqrt{3^2 - x^2 - y^2}$$

$$\mathbf{a'')} \quad \iiint_A g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) \cdot r dh dr d\varphi \quad (\text{w ukł. cylindr.})$$

$$a = 0 \quad b = 2\pi \quad c = 0 \quad d = 3 \quad e = 5 - \sqrt{3^2 - r^2} \quad f = 5 + \sqrt{3^2 - r^2}$$

$$\mathbf{a''')} \quad \iiint_A g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) \cdot r dr d\varphi dh \quad (\text{w ukł. cylindr.})$$

$$a = 5 - 3 \quad b = 5 + 3 \quad c = 0 \quad d = 2\pi \quad e = 0 \quad f = \sqrt{3^2 - (h - 5)^2}$$

b) dla stożka B o wierzch. w $(0,0,5)$, środku podstawy w $(0,0,1)$ i pr. podstawy 3

$$\mathbf{b')} \quad \iiint_B g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dz dy dx \quad (\text{w ukł. kartezj.})$$

$$a = -3 \quad b = 3 \quad c = -\sqrt{3^2 - x^2} \quad d = \sqrt{3^2 - x^2} \quad e = 1 \quad f = 5 - \frac{5-1}{3}\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\mathbf{b'')} \quad \iiint_B g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) \cdot r dh dr d\varphi \quad (\text{w ukł. cylindr.})$$

$$a = 0 \quad b = 2\pi \quad c = 0 \quad d = 3 \quad e = 1 \quad f = 5 - \frac{5-1}{3}r$$

$$\mathbf{b''')} \quad \iiint_B g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) \cdot r dr d\varphi dh \quad (\text{w ukł. cylindr.})$$

$$a = 1 \quad b = 5 \quad c = 0 \quad d = 2\pi \quad e = 0 \quad f = (5 - h)\frac{3}{5-1}$$

c) dla zbioru $C = \{(x, y, z) : |y| \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq z \leq 2x\}$

$$\mathbf{c')} \quad \iiint_C g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dz dy dx \quad (\text{w ukł. kartezj.})$$

$$a = 0 \quad b = 3 \quad c = -x \quad d = x \quad e = 0 \quad f = 2x$$

$$\mathbf{c'')} \quad \iiint_C g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dy dx dz \quad (\text{w ukł. kartezj.})$$

$$a = 0 \quad b = 2 \cdot 3 \quad c = \frac{1}{2}z \quad d = 3 \quad e = -x \quad f = x$$

$$\mathbf{c''')} \quad \iiint_C g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) r dh dr d\varphi \quad (\text{ukł. cylindr.})$$

$$a = -\frac{\pi}{4} \quad b = \frac{\pi}{4} \quad c = 0 \quad d = \frac{3}{\cos \varphi} \quad e = 0 \quad f = 2r \cos \varphi$$

d) dla zbioru D będącego częścią wspólną dwóch kul o środkach w $(0,0,-4)$ i w $(0,0,4)$ i jednakowych promieniach 6

$$\mathbf{d')} \quad \iiint_D g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dz dy dx \quad (\text{w ukł. kartezj.})$$

$$a = -\sqrt{6^2 - 4^2} \quad b = \sqrt{6^2 - 4^2} \quad c = -\sqrt{6^2 - 4^2 - x^2} \quad d = \sqrt{6^2 - 4^2 - x^2} \\ e = 4 - \sqrt{6^2 - x^2 - y^2} \quad f = -4 + \sqrt{6^2 - x^2 - y^2}$$

$$\mathbf{d'')} \quad \iiint_D g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) r dh dr d\varphi \quad (\text{ukł. cylindr.})$$

$$a = 0 \quad b = 2\pi \quad c = 0 \quad d = \sqrt{6^2 - 4^2} \quad e = 4 - \sqrt{6^2 - r^2} \quad f = -4 + \sqrt{6^2 - r^2}$$

$$\mathbf{d''')} \quad \iiint_D g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) r dr d\varphi dh \quad (\text{ukł. cylindr.})$$

$$a = 4 - 6 \quad b = 6 - 4 \quad c = 0 \quad d = 2\pi \quad e = 0 \quad f = \sqrt{6^2 - (|h| + 4)^2}$$

2 Niech $S = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 5 - x^2 - y^2\}$. Znajdź takie $p \in \mathbb{R}$, że powierzchnia $z = p(x^2 + y^2)$ dzieli S na dwie części o jednakowych objętościach.
(**Przedstaw pełne rozwiązanie.**)

Odp.: $p = 1$.

'Górna' część jest ograniczona od góry przez wykres funkcji $z = 5 - x^2 - y^2$, a od dołu przez $z = p(x^2 + y^2)$, zatem jej objętość

$$V_p = \iint_T (5 - x^2 - y^2) - (p(x^2 + y^2)) \, d\omega,$$

gdzie T jest rzutem na pł. $z = 0$ przekroju S z ową powierzchnią.

Brzeg T dostajemy przyrównując prawe strony w $z = 5 - x^2 - y^2$ i $z = p(x^2 + y^2)$. Stąd $x^2 + y^2 = \frac{5}{1+p}$, więc T jest kołem o środku $(0,0)$ i promieniu $\sqrt{\frac{5}{1+p}}$.

Przechodząc do ukł. biegunowego:

$$\begin{aligned} V_p &= \iint_T (5 - x^2 - y^2) - (p(x^2 + y^2)) \, d\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{5/(1+p)}} (5 - (1+p)r^2) \cdot r \, dr \, d\varphi \\ &= 2\pi \cdot \left(5 \cdot \frac{1}{2} r^2 - (1+p) \cdot \frac{1}{4} r^4 \right) \Big|_0^{\sqrt{5/(1+p)}} = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{5^2}{1+p}. \end{aligned}$$

By dokończyć zadanie zauważmy, że dla $p = 0$ otrzymujemy objętość S .

Zatem wystarczy rozwiązać równanie

$$V_p = \frac{1}{2} \cdot V_0$$

$$\text{czyli} \quad \frac{\pi}{2} \cdot \frac{5^2}{1+p} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{5^2}{1+0}.$$

Skąd odpowiedź: $p = 1$.

()

Proszę o samodzielną pracę, bez elektroniki. (Punktacja: zad 1. 12×3p.)

'Podaj' = 'podaj, bez uzasadnienia', po uproszczeniu do 'elegantkiej' postaci.

Tu jest miejsce na ciąg dalszy rozwiązania zadania 2.

AM3, k6, (B)

1. Zapisz całkę iterowaną **podając** wyrażenia a, b, c, d, e, f (uważaj na kolejność!)

a) dla kuli A o środku $(0,0,7)$ i promieniu 5

$$\mathbf{a'}) \quad \iiint_A g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dz dy dx \quad (\text{w ukł. kartezj.})$$

$$a = -5 \quad b = 5 \quad c = -\sqrt{5^2 - x^2} \quad d = \sqrt{5^2 - x^2} \quad e = 7 - \sqrt{5^2 - x^2 - y^2} \\ f = 7 + \sqrt{5^2 - x^2 - y^2}$$

$$\mathbf{a'')} \quad \iiint_A g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) \cdot r dh dr d\varphi \quad (\text{w ukł. cylindr.})$$

$$a = 0 \quad b = 2\pi \quad c = 0 \quad d = 5 \quad e = 7 - \sqrt{5^2 - r^2} \quad f = 7 + \sqrt{5^2 - r^2}$$

$$\mathbf{a''')} \quad \iiint_A g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) \cdot r dr d\varphi dh \quad (\text{w ukł. cylindr.})$$

$$a = 7 - 5 \quad b = 7 + 5 \quad c = 0 \quad d = 2\pi \quad e = 0 \quad f = \sqrt{5^2 - (h - 7)^2}$$

b) dla stożka B o wierzch. w $(0,0,7)$, środku podstawy w $(0,0,1)$ i pr. podstawy 5

$$\mathbf{b')} \quad \iiint_B g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dz dy dx \quad (\text{w ukł. kartezj.})$$

$$a = -5 \quad b = 5 \quad c = -\sqrt{5^2 - x^2} \quad d = \sqrt{5^2 - x^2} \quad e = 1 \quad f = 7 - \frac{7-1}{5}\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\mathbf{b'')} \quad \iiint_B g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) \cdot r dh dr d\varphi \quad (\text{w ukł. cylindr.})$$

$$a = 0 \quad b = 2\pi \quad c = 0 \quad d = 5 \quad e = 1 \quad f = 7 - \frac{7-1}{5}r$$

$$\mathbf{b''')} \quad \iiint_B g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) \cdot r dr d\varphi dh \quad (\text{w ukł. cylindr.})$$

$$a = 1 \quad b = 7 \quad c = 0 \quad d = 2\pi \quad e = 0 \quad f = (7 - h)\frac{5}{7-1}$$

c) dla zbioru $C = \{(x, y, z) : |y| \leq x \leq 5 \wedge 0 \leq z \leq 2x\}$

$$\mathbf{c')} \quad \iiint_C g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dz dy dx \quad (\text{w ukł. kartezj.})$$

$$a = 0 \quad b = 5 \quad c = -x \quad d = x \quad e = 0 \quad f = 2x$$

$$\mathbf{c'')} \quad \iiint_C g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dy dx dz \quad (\text{w ukł. kartezj.})$$

$$a = 0 \quad b = 2 \cdot 5 \quad c = \frac{1}{2}z \quad d = 5 \quad e = -x \quad f = x$$

$$\mathbf{c''')} \quad \iiint_C g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) r dh dr d\varphi \quad (\text{ukł. cylindr.})$$

$$a = -\frac{\pi}{4} \quad b = \frac{\pi}{4} \quad c = 0 \quad d = \frac{5}{\cos \varphi} \quad e = 0 \quad f = 2r \cos \varphi$$

d) dla zbioru D będącego częścią wspólną dwóch kul o środkach w $(0,0,-5)$ i w $(0,0,5)$ i jednakowych promieniach 7

$$\mathbf{d')} \quad \iiint_D g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dz dy dx \quad (\text{w ukł. kartezj.})$$

$$a = -\sqrt{7^2 - 5^2} \quad b = \sqrt{7^2 - 5^2} \quad c = -\sqrt{7^2 - 5^2 - x^2} \quad d = \sqrt{7^2 - 5^2 - x^2} \\ e = 5 - \sqrt{7^2 - x^2 - y^2} \quad f = -5 + \sqrt{7^2 - x^2 - y^2}$$

$$\mathbf{d'')} \quad \iiint_D g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) r dh dr d\varphi \quad (\text{ukł. cylindr.})$$

$$a = 0 \quad b = 2\pi \quad c = 0 \quad d = \sqrt{7^2 - 5^2} \quad e = 5 - \sqrt{7^2 - r^2} \quad f = -5 + \sqrt{7^2 - r^2}$$

$$\mathbf{d''')} \quad \iiint_D g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) r dr d\varphi dh \quad (\text{ukł. cylindr.})$$

$$a = 5 - 7 \quad b = 7 - 5 \quad c = 0 \quad d = 2\pi \quad e = 0 \quad f = \sqrt{7^2 - (|h| + 5)^2}$$

2 Niech $S = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 7 - x^2 - y^2\}$. Znajdź takie $p \in \mathbb{R}$, że powierzchnia $z = p(x^2 + y^2)$ dzieli S na dwie części o jednakowych objętościach.
(**Przedstaw pełne rozwiązanie.**)

Odp.: $p = 1$.

'Górna' część jest ograniczona od góry przez wykres funkcji $z = 7 - x^2 - y^2$, a od dołu przez $z = p(x^2 + y^2)$, zatem jej objętość

$$V_p = \iint_T (7 - x^2 - y^2) - (p(x^2 + y^2)) \, d\omega,$$

gdzie T jest rzutem na pł. $z = 0$ przekroju S z ową powierzchnią.

Brzeg T dostajemy przyrównując prawe strony w $z = 7 - x^2 - y^2$ i $z = p(x^2 + y^2)$. Stąd $x^2 + y^2 = \frac{7}{1+p}$, więc T jest kołem o środku $(0,0)$ i promieniu $\sqrt{\frac{7}{1+p}}$.

Przechodząc do ukł. biegunowego:

$$\begin{aligned} V_p &= \iint_T (7 - x^2 - y^2) - (p(x^2 + y^2)) \, d\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{7/(1+p)}} (7 - (1+p)r^2) \cdot r \, dr \, d\varphi \\ &= 2\pi \cdot \left(7 \cdot \frac{1}{2} r^2 - (1+p) \cdot \frac{1}{4} r^4 \right) \Big|_0^{\sqrt{7/(1+p)}} = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{7^2}{1+p}. \end{aligned}$$

By dokończyć zadanie zauważmy, że dla $p = 0$ otrzymujemy objętość S .

Zatem wystarczy rozwiązać równanie

$$V_p = \frac{1}{2} \cdot V_0$$

$$\text{czyli} \quad \frac{\pi}{2} \cdot \frac{7^2}{1+p} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{7^2}{1+0}.$$

Skąd odpowiedź: $p = 1$.

()

Proszę o samodzielną pracę, bez elektroniki. (Punktacja: zad 1. 12×3p.)

'Podaj' = 'podaj, bez uzasadnienia', po uproszczeniu do 'eleganckiej' postaci.

Tu jest miejsce na ciąg dalszy rozwiązania zadania 2.

AM3, k6, (C)

1. Zapisz całkę iterowaną **podając** wyrażenia a, b, c, d, e, f (uważaj na kolejność!)

a) dla kuli A o środku $(0,0,7)$ i promieniu 3

$$\mathbf{a'}) \quad \iiint_A g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dz dy dx \quad (\text{w ukł. kartezj.})$$

$$a = -3 \quad b = 3 \quad c = -\sqrt{3^2 - x^2} \quad d = \sqrt{3^2 - x^2} \quad e = 7 - \sqrt{3^2 - x^2 - y^2} \\ f = 7 + \sqrt{3^2 - x^2 - y^2}$$

$$\mathbf{a'')} \quad \iiint_A g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) \cdot r dh dr d\varphi \quad (\text{w ukł. cylindr.})$$

$$a = 0 \quad b = 2\pi \quad c = 0 \quad d = 3 \quad e = 7 - \sqrt{3^2 - r^2} \quad f = 7 + \sqrt{3^2 - r^2}$$

$$\mathbf{a''')} \quad \iiint_A g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) \cdot r dr d\varphi dh \quad (\text{w ukł. cylindr.})$$

$$a = 7 - 3 \quad b = 7 + 3 \quad c = 0 \quad d = 2\pi \quad e = 0 \quad f = \sqrt{3^2 - (h - 7)^2}$$

b) dla stożka B o wierzch. w $(0,0,7)$, środku podstawy w $(0,0,1)$ i pr. podstawy 3

$$\mathbf{b')} \quad \iiint_B g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dz dy dx \quad (\text{w ukł. kartezj.})$$

$$a = -3 \quad b = 3 \quad c = -\sqrt{3^2 - x^2} \quad d = \sqrt{3^2 - x^2} \quad e = 1 \quad f = 7 - \frac{7-1}{3} \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\mathbf{b'')} \quad \iiint_B g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) \cdot r dh dr d\varphi \quad (\text{w ukł. cylindr.})$$

$$a = 0 \quad b = 2\pi \quad c = 0 \quad d = 3 \quad e = 1 \quad f = 7 - \frac{7-1}{3} r$$

$$\mathbf{b''')} \quad \iiint_B g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) \cdot r dr d\varphi dh \quad (\text{w ukł. cylindr.})$$

$$a = 1 \quad b = 7 \quad c = 0 \quad d = 2\pi \quad e = 0 \quad f = (7 - h) \frac{3}{7-1}$$

c) dla zbioru $C = \{(x, y, z) : |y| \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq z \leq 2x\}$

$$\mathbf{c')} \quad \iiint_C g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dz dy dx \quad (\text{w ukł. kartezj.})$$

$$a = 0 \quad b = 3 \quad c = -x \quad d = x \quad e = 0 \quad f = 2x$$

$$\mathbf{c'')} \quad \iiint_C g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dy dx dz \quad (\text{w ukł. kartezj.})$$

$$a = 0 \quad b = 2 \cdot 3 \quad c = \frac{1}{2} z \quad d = 3 \quad e = -x \quad f = x$$

$$\mathbf{c''')} \quad \iiint_C g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) r dh dr d\varphi \quad (\text{ukł. cylindr.})$$

$$a = -\frac{\pi}{4} \quad b = \frac{\pi}{4} \quad c = 0 \quad d = \frac{3}{\cos \varphi} \quad e = 0 \quad f = 2r \cos \varphi$$

d) dla zbioru D będącego częścią wspólną dwóch kul o środkach w $(0,0,-4)$ i w $(0,0,4)$ i jednakowych promieniach 7

$$\mathbf{d')} \quad \iiint_D g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dz dy dx \quad (\text{w ukł. kartezj.})$$

$$a = -\sqrt{7^2 - 4^2} \quad b = \sqrt{7^2 - 4^2} \quad c = -\sqrt{7^2 - 4^2 - x^2} \quad d = \sqrt{7^2 - 4^2 - x^2} \\ e = 4 - \sqrt{7^2 - x^2 - y^2} \quad f = -4 + \sqrt{7^2 - x^2 - y^2}$$

$$\mathbf{d'')} \quad \iiint_D g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) r dh dr d\varphi \quad (\text{ukł. cylindr.})$$

$$a = 0 \quad b = 2\pi \quad c = 0 \quad d = \sqrt{7^2 - 4^2} \quad e = 4 - \sqrt{7^2 - r^2} \quad f = -4 + \sqrt{7^2 - r^2}$$

$$\mathbf{d''')} \quad \iiint_D g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) r dr d\varphi dh \quad (\text{ukł. cylindr.})$$

$$a = 4 - 7 \quad b = 7 - 4 \quad c = 0 \quad d = 2\pi \quad e = 0 \quad f = \sqrt{7^2 - (|h| + 4)^2}$$

2 Niech $S = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 7 - x^2 - y^2\}$. Znajdź takie $p \in \mathbb{R}$, że powierzchnia $z = p(x^2 + y^2)$ dzieli S na dwie części o jednakowych objętościach.
(**Przedstaw pełne rozwiązanie.**)

Odp.: $p = 1$.

'Górna' część jest ograniczona od góry przez wykres funkcji $z = 7 - x^2 - y^2$, a od dołu przez $z = p(x^2 + y^2)$, zatem jej objętość

$$V_p = \iint_T (7 - x^2 - y^2) - (p(x^2 + y^2)) \, d\omega,$$

gdzie T jest rzutem na pł. $z = 0$ przekroju S z ową powierzchnią.

Brzeg T dostajemy przyrównując prawe strony w $z = 7 - x^2 - y^2$ i $z = p(x^2 + y^2)$. Stąd $x^2 + y^2 = \frac{7}{1+p}$, więc T jest kołem o środku $(0,0)$ i promieniu $\sqrt{\frac{7}{1+p}}$.

Przechodząc do ukł. biegunowego:

$$\begin{aligned} V_p &= \iint_T (7 - x^2 - y^2) - (p(x^2 + y^2)) \, d\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{7/(1+p)}} (7 - (1+p)r^2) \cdot r \, dr \, d\varphi \\ &= 2\pi \cdot \left(7 \cdot \frac{1}{2} r^2 - (1+p) \cdot \frac{1}{4} r^4 \right) \Big|_0^{\sqrt{7/(1+p)}} = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{7^2}{1+p}. \end{aligned}$$

By dokończyć zadanie zauważmy, że dla $p = 0$ otrzymujemy objętość S .

Zatem wystarczy rozwiązać równanie

$$V_p = \frac{1}{2} \cdot V_0$$

$$\text{czyli} \quad \frac{\pi}{2} \cdot \frac{7^2}{1+p} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{7^2}{1+0}.$$

Skąd odpowiedź: $p = 1$.

()

Proszę o samodzielną pracę, bez elektroniki. (Punktacja: zad 1. 12×3p.)

'Podaj' = 'podaj, bez uzasadnienia', po uproszczeniu do 'eleganckiej' postaci.

Tu jest miejsce na ciąg dalszy rozwiązania zadania 2.

AM3, k6, (D)

1. Zapisz całkę iterowaną **podając** wyrażenia a, b, c, d, e, f (uważaj na kolejność!)

a) dla kuli A o środku $(0,0,6)$ i promieniu 3

$$\mathbf{a'}) \quad \iiint_A g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dz dy dx \quad (\text{w ukł. kartezj.})$$

$$a = -3 \quad b = 3 \quad c = -\sqrt{3^2 - x^2} \quad d = \sqrt{3^2 - x^2} \quad e = 6 - \sqrt{3^2 - x^2 - y^2} \\ f = 6 + \sqrt{3^2 - x^2 - y^2}$$

$$\mathbf{a'')} \quad \iiint_A g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) \cdot r dh dr d\varphi \quad (\text{w ukł. cylindr.})$$

$$a = 0 \quad b = 2\pi \quad c = 0 \quad d = 3 \quad e = 6 - \sqrt{3^2 - r^2} \quad f = 6 + \sqrt{3^2 - r^2}$$

$$\mathbf{a''')} \quad \iiint_A g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) \cdot r dr d\varphi dh \quad (\text{w ukł. cylindr.})$$

$$a = 6 - 3 \quad b = 6 + 3 \quad c = 0 \quad d = 2\pi \quad e = 0 \quad f = \sqrt{3^2 - (h - 6)^2}$$

b) dla stożka B o wierzh. w $(0,0,6)$, środku podstawy w $(0,0,1)$ i pr. podstawy 3

$$\mathbf{b')} \quad \iiint_B g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dz dy dx \quad (\text{w ukł. kartezj.})$$

$$a = -3 \quad b = 3 \quad c = -\sqrt{3^2 - x^2} \quad d = \sqrt{3^2 - x^2} \quad e = 1 \quad f = 6 - \frac{6-1}{3}\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\mathbf{b'')} \quad \iiint_B g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) \cdot r dh dr d\varphi \quad (\text{w ukł. cylindr.})$$

$$a = 0 \quad b = 2\pi \quad c = 0 \quad d = 3 \quad e = 1 \quad f = 6 - \frac{6-1}{3}r$$

$$\mathbf{b''')} \quad \iiint_B g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) \cdot r dr d\varphi dh \quad (\text{w ukł. cylindr.})$$

$$a = 1 \quad b = 6 \quad c = 0 \quad d = 2\pi \quad e = 0 \quad f = (6 - h)\frac{3}{6-1}$$

c) dla zbioru $C = \{(x, y, z) : |y| \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq z \leq 2x\}$

$$\mathbf{c')} \quad \iiint_C g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dz dy dx \quad (\text{w ukł. kartezj.})$$

$$a = 0 \quad b = 3 \quad c = -x \quad d = x \quad e = 0 \quad f = 2x$$

$$\mathbf{c'')} \quad \iiint_C g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dy dx dz \quad (\text{w ukł. kartezj.})$$

$$a = 0 \quad b = 2 \cdot 3 \quad c = \frac{1}{2}z \quad d = 3 \quad e = -x \quad f = x$$

$$\mathbf{c''')} \quad \iiint_C g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) r dh dr d\varphi \quad (\text{ukł. cylindr.})$$

$$a = -\frac{\pi}{4} \quad b = \frac{\pi}{4} \quad c = 0 \quad d = \frac{3}{\cos \varphi} \quad e = 0 \quad f = 2r \cos \varphi$$

d) dla zbioru D będącego częścią wspólną dwóch kul o środkach w $(0,0,-6)$ i w $(0,0,6)$ i jednakowych promieniach 7

$$\mathbf{d')} \quad \iiint_D g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dz dy dx \quad (\text{w ukł. kartezj.})$$

$$a = -\sqrt{7^2 - 6^2} \quad b = \sqrt{7^2 - 6^2} \quad c = -\sqrt{7^2 - 6^2 - x^2} \quad d = \sqrt{7^2 - 6^2 - x^2} \\ e = 6 - \sqrt{7^2 - x^2 - y^2} \quad f = -6 + \sqrt{7^2 - x^2 - y^2}$$

$$\mathbf{d'')} \quad \iiint_D g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) r dh dr d\varphi \quad (\text{ukł. cylindr.})$$

$$a = 0 \quad b = 2\pi \quad c = 0 \quad d = \sqrt{7^2 - 6^2} \quad e = 6 - \sqrt{7^2 - r^2} \quad f = -6 + \sqrt{7^2 - r^2}$$

$$\mathbf{d''')} \quad \iiint_D g(x, y, z) d\omega = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) r dr d\varphi dh \quad (\text{ukł. cylindr.})$$

$$a = 6 - 7 \quad b = 7 - 6 \quad c = 0 \quad d = 2\pi \quad e = 0 \quad f = \sqrt{7^2 - (|h| + 6)^2}$$

2 Niech $S = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 6 - x^2 - y^2\}$. Znajdź takie $p \in \mathbb{R}$, że powierzchnia $z = p(x^2 + y^2)$ dzieli S na dwie części o jednakowych objętościach.
(**Przedstaw pełne rozwiązanie.**)

Odp.: $p = 1$.

'Górna' część jest ograniczona od góry przez wykres funkcji $z = 6 - x^2 - y^2$, a od dołu przez $z = p(x^2 + y^2)$, zatem jej objętość

$$V_p = \iint_T (6 - x^2 - y^2) - (p(x^2 + y^2)) \, d\omega,$$

gdzie T jest rzutem na pł. $z = 0$ przekroju S z ową powierzchnią.

Brzeg T dostajemy przyrównując prawe strony w $z = 6 - x^2 - y^2$ i $z = p(x^2 + y^2)$. Stąd $x^2 + y^2 = \frac{6}{1+p}$, więc T jest kołem o środku $(0,0)$ i promieniu $\sqrt{\frac{6}{1+p}}$.

Przechodząc do ukł. biegunowego:

$$\begin{aligned} V_p &= \iint_T (6 - x^2 - y^2) - (p(x^2 + y^2)) \, d\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{6/(1+p)}} (6 - (1+p)r^2) \cdot r \, dr \, d\varphi \\ &= 2\pi \cdot \left(6 \cdot \frac{1}{2} r^2 - (1+p) \cdot \frac{1}{4} r^4 \right) \Big|_0^{\sqrt{6/(1+p)}} = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{6^2}{1+p}. \end{aligned}$$

By dokończyć zadanie zauważmy, że dla $p = 0$ otrzymujemy objętość S .

Zatem wystarczy rozwiązać równanie

$$V_p = \frac{1}{2} \cdot V_0$$

$$\text{czyli} \quad \frac{\pi}{2} \cdot \frac{6^2}{1+p} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{6^2}{1+0}.$$

Skąd odpowiedź: $p = 1$.

()

Proszę o samodzielną pracę, bez elektroniki. (Punktacja: zad 1. 12×3p.)

'Podaj' = 'podaj, bez uzasadnienia', po uproszczeniu do 'eleganckiej' postaci.

Tu jest miejsce na ciąg dalszy rozwiązania zadania 2.