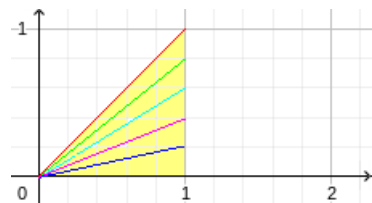


ANALIZA MATEMATYCZNA 3, NOTATKI Z WYKŁADU 10B $\iint_P f$

PRZYKŁAD 0. Niech $f(x, y) = x^2$, $P = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x, x \in [0, 1]\}$ i $n \in \mathbb{N}$.

a) Linie postaci $y = \frac{k}{n} \cdot x$, $k \in \mathbb{Z}$ wyznaczają podział ω'_n zbioru P , dla którego:



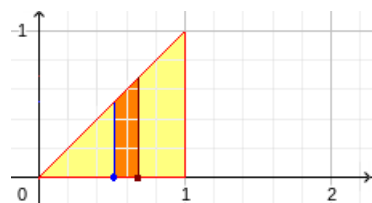
- $\sup f[P_i] = \dots\dots$ dla każdego $P_i \in \omega'_n$
- $\inf f[P_i] = \dots\dots$ dla każdego $P_i \in \omega'_n$

skąd

$$s_{\omega'_n} = \dots\dots\dots S_{\omega'_n} = \dots\dots\dots$$

i NIC z tego nie mamy; różnią się bardzo!

b) Linie postaci $x = \sqrt{\frac{k}{n}}$, $k \in \mathbb{Z}$ wyznaczają podział ω''_n zbioru P , dla którego:



- pole $P_k = \dots\dots$ dla każdego $P_k \in \omega''_n$

stąd

$$s_{\omega''_n} = \dots\dots\dots S_{\omega''_n} = \dots\dots\dots$$

skąd

$$\iint_P x^2 d\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\omega''_n} = \dots\dots$$

* * *

TWIERDZENIE. Jeśli $f(x, y)$ jest ciągła na zwartym P , to jest całkowalna na P , tzn. $\iint_P f = \overline{\iint_P f}$, całka dolna i górna są równe.

Ponadto, jeśli ω_n jest ciągiem coraz drobniejszych podziałów P , tzn. takim, że największe średnice ich elementów są zbieżne do 0, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{\omega_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\omega_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\omega_n} = \iint_P f.$$

Powyższe twierdzenie pozwala łatwo dowodzić twierdzeń takich, jak poniższe:

Tw.

a) Jeśli $\dots\dots\dots$, to $\iint_P f(x, y) + g(x, y) d\omega = \dots\dots\dots$

b) Jeśli $\dots\dots\dots$, to $\iint_P \pi \cdot f(x, y) - e \cdot g(x, y) d\omega = \dots\dots\dots$

c) Jeśli $\dots\dots\dots$, to $\iint_{A \cup B} f(x, y) d\omega = \dots\dots\dots$

d) Jeśli $\forall_{x,y} f(x, y) = -f(-x, y)$, to $\iint_{[-2,2] \times [-3,3]} f(x, y) d\omega = \dots\dots\dots$

e) Jeśli $\dots\dots\dots$, to $\dots\dots\dots$

SPOSTRZEŻENIA.

- $S_\omega - s_\omega = \left(\sum_i \sup_{P_i} f \cdot |P_i| \right) - \left(\sum_i \inf_{P_i} f \cdot |P_i| \right) = \sum_i (\sup_{P_i} f - \inf_{P_i} f) \cdot |P_i|.$
- Gdy wszystkie elementy podziału mają to samo pole $|P_i| = p$, to $S_\omega - s_\omega = p \cdot \sum_i (\sup_{P_i} f - \inf_{P_i} f).$
- Gdy na wszystkich elementach podziału jednakowa jest różnica $\sup_{P_i} f - \inf_{P_i} f = c$, to $S_\omega - s_\omega = c \cdot \sum_i |P_i| = c \cdot |P|.$

Twierdzenie. (o zamianie całki podwójnej na iterowaną)

Niech $P = \{(x, y) : \varphi(x) \leq y \leq \psi(x), x \in [a, b]\}$, gdzie $\varphi(x), \psi(x)$ są f-cjami ciągłymi takimi, że $\varphi(x) \leq \psi(x)$ dla $x \in [a, b]$. Wtedy dla funkcji $f(x, y)$ ciągłej na P mamy

$$\iint_P f(x, y) d\omega = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Powyższe twierdzenie ma też wersję dualną. Uzupełnij założenia:

Twierdzenie. (o zamianie całki podwójnej na iterowaną)

Niech $Q = \{ \dots \}$

$\dots$

$$\iint_Q f(x, y) d\omega = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Teraz już można stosować rachunek całkowy:

Przykłady.

a) Niech T oznacza trójkąt o wierzchołkach: $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$. Wtedy

$$\begin{aligned} \iint_T 3(x+y)^2 d\omega &= \int_0^1 \left(\int_{\dots}^{2x} 3(x+y)^2 dy \right) dx = \int_0^1 ((x+y)^3)_{\dots}^{2x} dx = \\ &= \int_0^1 (x+2x)^3 - (x+\dots)^3 dx = \int_0^1 19x^3 dx = 19 \cdot \frac{1}{4}(1^4 - 0^4) = \frac{19}{4}. \end{aligned}$$

Można też inaczej (zmieniając granice w całce iterowanej):

$$\iint_T 3(x+y)^2 d\omega = \int_0^2 \left(\int_{y/2}^1 3(x+y)^2 dx \right) dy = \int_0^2 ((x+y)^3)_{y/2}^1 dy = \dots = \frac{19}{4}. \quad \square$$

b) Oblicz $\iint_P xy d\omega$, gdzie P ograniczają linie: $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$.

Pierwiastek nieco niepokoi, zatem może wygodniej jest przedstawić to tak:

$$\iint_P xy d\omega = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^1 xy dx \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^2 y \right)_{y^2}^1 dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y - y^5 dy = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6}. \quad \square$$

c) Oblicz $\iint_K y d\omega$, gdzie K jest kołem o środku $(3,0)$ i promieniu 3.

$$\begin{aligned} \iint_P y d\omega &= \int_0^6 \left(\int_{-\sqrt{9-(x-3)^2}}^{+\sqrt{9-(x-3)^2}} y dy \right) dx = \int_0^6 \left(\frac{1}{2} y^2 \right)_{-\sqrt{9-(x-3)^2}}^{+\sqrt{9-(x-3)^2}} dx = \\ &= \int_0^6 \frac{1}{2} \left((9 - (x-3)^2) - (9 - (x-3)^2) \right) dx = \int_0^6 0 dx = 0. \end{aligned}$$

Zero?! Czy to można było przewidzieć? Tak, por. Lista 2.

$\square$

d) Dla czworobścianu C o wierzchołkach $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 6)$ mamy:

$$\begin{aligned} \iiint_C x^2 d\omega &= \int_0^1 \left(\int_0^{3-3x} \left(\int_0^{6-6x-2y} x^2 dz \right) dy \right) dx = \quad \left(\begin{array}{l} \text{w wewnętrznym nawiasie} \\ x^2 \text{ jest jak stała} \end{array} \right) \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{3-3x} x^2 \cdot (6-6x-2y) dy \right) dx = \quad \left(\begin{array}{l} \text{zatem mnożymy } x^2 \\ \text{przez długość przedziału} \end{array} \right) \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{3-3x} 6x^2 - 6x^3 - 2x^2 y dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 (6x^2(3-3x) - 6x^3(3-3x) - x^2((3-3x)^2 - 0^2)) dx = \quad \begin{array}{l} \text{żmudnie!} \\ \text{ale łatwo!} \end{array} \\ &= 9 \int_0^1 x^4 - 2x^3 + x^2 dx = 9 \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot 1^5 - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1^4 + \frac{1}{3} \cdot 1^3 \right) = \frac{3}{10} \quad (\text{uff!}) \end{aligned}$$

Tą samą całkę potrójną można inaczej zamienić na całkę iterowaną, np.:

$$\iiint_C x^2 d\omega = \int_0^6 \left(\int_0^{1-z/6} \left(\int_0^{3-3x-z/2} x^2 dy \right) dx \right) dz = \dots \quad \begin{array}{l} \text{nie ma co liczyć} \\ \text{wyjdzie tyle samo} \end{array}$$

Można jeszcze inaczej:

$$\iiint_C x^2 d\omega = \int \dots \left(\int \dots \left(\int \dots x^2 dz \right) dx \right) dy = \dots \quad \text{A jeszcze inaczej? Tak!} \quad \square$$

e) Poniższa całka iterowana

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\int_x^{2x} \left(\int_0^{x^2+y^2} x^2 dz \right) dy \right) dx &= \int_1^2 \left(\int_x^{2x} x^4 + x^2 y^2 dy \right) dx = \\ &= \int_1^2 x^4(2x-x) + \frac{1}{3} x^2(8x^3-x^3) dx = \int_1^2 \frac{10}{3} x^5 dx = \frac{10}{3 \cdot 6} (2^6 - 1^6) = 35 \end{aligned}$$

jest równa całce potrójnej

$$\iiint_V x^2 d\omega, \quad \text{gdzie} \quad V = \{(x, y, z) : x \in [1, 2] \wedge x \leq y \leq \dots \wedge 0 \leq z \leq \dots\};$$

mówiąc 'prozą': V jest bryłą pod paraboloidą $z = x^2 + \dots$ leżącą nad trapezem o wierzchołkach $(1, 1, 0)$, $(2, 2, 0)$, $(2, \dots, 0)$, $(1, \dots, \dots)$. $\square$