

ANALIZA MATEMATYCZNA 3, NOTATKI Z WYKŁADU 11.A

układ kartezjański		układ biegunowy
(x, y)	$\longleftrightarrow$ $x=r \cos \varphi$ $y=r \sin \varphi$	(r, φ)
$(1, 1)$	$\longleftrightarrow$	$(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$
$(-3, 3)$	$\longleftrightarrow$	$(\dots\dots , \dots\dots)$
$(\dots\dots , \dots\dots)$	$\longleftrightarrow$	$(7, \frac{5\pi}{4})$
$(2, \dots\dots)$	$\longleftrightarrow$	$(\dots\dots , \frac{\pi}{3})$
$y > 0$	$\longleftrightarrow$	$0 < \varphi < \pi$
$\dots\dots\dots$	$\longleftrightarrow$	$\varphi \in [\pi, \frac{3}{2}\pi]$
$\dots\dots\dots$	$\longleftrightarrow$	$\varphi = \frac{\pi}{3}$
$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$	$\longleftrightarrow$	$\dots\dots\dots$
$x^2 + y^2 = 9$	$\longleftrightarrow$	$r = 3$
$\dots\dots\dots$	$\longleftrightarrow$	$r = 5, \varphi \in [\pi, 2\pi]$
$\dots\dots\dots$	$\longleftrightarrow$	$1 \leq r < 4$
$(x - 3)^2 + y^2 \leq 9$	$\longleftrightarrow$	$r \leq 6 \cos \varphi, \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$x^2 + (y - 5)^2 = 25$	$\longleftrightarrow$	$\dots\dots\dots$

ŚCIAGA. Zmiana całki podwójnej w układzie kartezjańskim na całkę podwójną w układzie biegunowym

$$\iint_P f(x, y) d\omega = \iint_{\bar{P}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r d\bar{\omega}.$$

UWAGA. Owe '·r' jest zwane jakobianem. PO CO TO?

PRZYKŁAD. A

$$\iint_{\substack{x \leq 0, 0 \leq y \\ x^2 + y^2 \leq 1}} x^4 + y^4 + 2(xy)^2 d\omega = \iint_{\substack{r \leq 1 \\ \varphi \in [\pi/2, \dots]}} r^4 \cdot r d\bar{\omega} = \int_{\pi/2}^{\dots} \int_0^1 r^5 dr d\varphi = \int_{\pi/2}^{\dots} \frac{1}{6} 1^6 d\varphi = \frac{\pi}{6}.$$

PRZYKŁAD. B

$$\iint_{\substack{0 \leq x \leq y \\ x^2 + y^2 \leq 4}} xy d\omega = \iint_{\substack{r \leq 2 \\ \varphi \in [\pi/4, \pi/2]}} r \cos \varphi \cdot r \sin \varphi \cdot r d\bar{\omega} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^2 r^3 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\varphi dr d\varphi = \dots$$

PRZYKŁAD KW1.

Niech K oznacza kulę o średnicy 2, a W – walec (nieskończony) o średnicy 1. Jaka część K leży poza W , gdy środek kuli leży na osi walca?

Odp.: $\frac{obj(K \setminus W)}{obj(K)}$, gdzie

$$obj.(K \setminus W) = 2 \iint_{\frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1} \sqrt{1 - x^2 - y^2} d\omega = \underset{\text{u.b.}}{2} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1 - r^2} \cdot r dr d\varphi = \dots$$

PRZYKŁAD KW2.

Niech K oznacza kulę o średnicy 2, a W – walec (nieskończony) o średnicy 1. Jaka część K leży poza W , gdy środek kuli leży na powierzchni walca.