

ANALIZA MATEMATYCZNA 3, NOTATKI Z WYKŁADU 11B

POLE PŁATA

Wyznamy pole powierzchni płata – to jest części wykresu funkcji $z = f(x, y)$ nad obszarem $P \subseteq \mathbb{R}^2$ domkniętym i ograniczonym, zawartym w dziedzinie funkcji f przy założeniu ciągłości pochodnych cząstkowych f'_x, f'_y .

POMYSŁ:

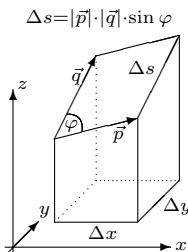
Bierzemy 'drobny' podział $\omega = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ obszaru P 'głównie' na prostokąty o polach Δp_i ('głównie' tzn. elementy podziału, które nie są prostokątami mają łącznie 'znikome' pole). Wybieramy punkty $(x_i, y_i) \in P_i$ i w przestrzeni prowadzimy płaszczyznę styczną do wykresu f w punktach $(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$. Części tych płaszczyzn utworzone nad prostokątami P_i wyglądają jak karteczki (równoległoboki) oblepiające tę powierzchnię. Suma ich pól $\sum_i \Delta s_i$ przybliża szukane pole płata.

'Nad' ustalonym prostokątem z podziału ω 'żyje' karteczka', tj. równoległobok rozpięty przez (pewne) wektory $\vec{p}, \vec{q}$

Płaszczyzna styczna jest wyznaczona przez gradient funkcji f , zatem można przyjąć, że te wektory mają współrzędne:

$$\vec{p} = [\Delta x, 0, f'_x \cdot \Delta x], \quad \vec{q} = [0, \Delta y, f'_y \cdot \Delta y].$$

Stąd obliczamy pole Δs owego równoległoboku (korzystając z prostoty iloczynu skalarnego [zamiast tego można ewentualnie skorzystać z interpretacji wyznacznika pary wektorów]):



$$\begin{aligned} \Delta s &= |\vec{p}| |\vec{q}| \sin \varphi = |\vec{p}| |\vec{q}| \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{|\vec{p}|^2 |\vec{q}|^2 - (|\vec{p}| |\vec{q}| \cos \varphi)^2} = \\ &= \sqrt{((\Delta x)^2 + (f'_x \Delta x)^2)((\Delta y)^2 + (f'_y \Delta y)^2) - (f'_x \Delta x \cdot f'_y \Delta y)^2} = \dots\dots\dots \\ &= \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \end{aligned}$$

UWAGA. Powyżej pominięte są indeksy 'i', pochodne cząstk. liczone są w punktach (x_i, y_i) .

Zatem pole płata f nad P jest równe poniższej całce

$$\sum_i \Delta s_i = \sum_i \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} \Delta x \Delta y = \sum_i \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} \Delta p_i \approx \boxed{\iint_P \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} \, d\omega.}$$

' $\approx$ ' oznacza tu: gdy weźmiemy ciąg coraz drobniejszych podziałów (o maksymalnych średnicach zbieżnych do 0), to granica sum $\sum_i \Delta s_i$ jest zbieżna do całki (z def. całki).

PRZYKŁAD A.

Powierzchnia płata $f(x, y) = \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}})$ nad trójkątem P o wierzchołkach $(0, 0), (0, 1), (7, 1)$, czyli nad obszarem: $0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 7y$:

$$\begin{aligned} \iint_P \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} d\omega &= \iint_{\substack{0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 7y}} \sqrt{1 + x + y} d\omega = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{7y} \sqrt{1 + x + y} dx \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{2}{3}(1 + x + y)^{\frac{3}{2}} \right)_0^{7y} dy = \\ &= \dots \\ &= \frac{25}{3} - \frac{16}{15}\sqrt{2} . \end{aligned}$$

PRZYKŁAD B. Oblicz pole zbioru $S = \{(x, y, z) : z = xy, x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq x \leq y\}$.

Odczarujmy ten napis; chodzi tu o

pole płata $f(x, y) = xy$ nad zbiorem $P = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq x \leq y\}$,
czyli

$$\begin{aligned} \iint_P \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} d\omega &= \iint_P \sqrt{1 + y^2 + x^2} d\omega = \\ &\stackrel{\text{współ.}}{\stackrel{\text{bieg.}}{=}} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_0^3 \sqrt{1 + r^2} \cdot r dr \right) d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \left[\frac{1}{3}(1 + r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = \frac{\pi}{12}(10\sqrt{10} - 1). \end{aligned}$$

UWAGA. Można pomyśleć o przybliżaniu powierzchni płata w inny sposób: wybieramy na płacie skończenie wiele punktów 'gęsto rozmieszczonych (dużo)'; z nich tworzymy trójkąty (triangulację); suma pól tych trójkątów powinna przybliżać pole płata — **TEN POMYSŁ JEST ZŁY**, zły nawet w przypadku powierzchni bocznej walca; szczegóły (i rysunki) można znaleźć np. w III tomie Fichtenholza, rozdział XVII, §2.