

ANALIZA MATEMATYCZNA 3, NOTATKI Z WYKŁADU 12A

układ kartezjański (x, y, z)	$\longleftrightarrow$ $x = r \cos \varphi$ $y = r \sin \varphi$ $z = h$	układ cylindryczny (r, φ, h)	
(1, 1, 1)	$\longleftrightarrow$	$r = \sqrt{2}, \varphi = \frac{\pi}{4}, h = 1$	
(-3, 3, -2)	$\longleftrightarrow$	$r = \dots\dots, \varphi = \dots\dots, h = \dots\dots$	
($\dots\dots, \dots\dots, \dots\dots$)	$\longleftrightarrow$	$r = 7, \varphi = \frac{7\pi}{4}, h = -2$	
$x, y, z \geq 0$	$\longleftrightarrow$	$\dots\dots\dots$	
$\dots\dots\dots$	$\longleftrightarrow$	$r \leq 2, \varphi \in [\pi, \frac{3}{2}\pi], 1 \leq h \leq 5$	
$\dots\dots\dots$	$\longleftrightarrow$	$r = \sin \varphi, h = 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	Wsk.: Pomnóż pierwsze równanie przez r .
$\dots\dots\dots$	$\longleftrightarrow$	$r = \cos \varphi, 0 \leq h \leq r, \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	
$\dots\dots\dots$	$\longleftrightarrow$	$r = \frac{2}{\sin \varphi - 3 \cos \varphi}, h \in [0, 1]$	Wsk.: Pomnóż równanie przez mianownik.
$y = x + \pi, z = 0$	$\longleftrightarrow$	$\dots\dots\dots$	
$x^2 + y^2 - 6y = 0, 1 \leq z \leq 4$	$\longleftrightarrow$	$\dots\dots\dots$	
$z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 3$	$\longleftrightarrow$	$\dots\dots\dots$	

ŚCIAĞA Zmiana całki potrójnej w układzie kartezjańskim na całkę potrójną w układzie cylindrycznym

$$\iiint_W f(x, y, z) d\omega = \iiint_{\bar{W}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) \cdot r d\bar{\omega}.$$

PRZYKŁAD A.

$$\iiint_{\substack{x^2+y^2 \leq 4 \\ 1 \leq z \leq 3}} xy+z d\omega = \iiint_{\substack{\varphi \in [0, 2\pi] \\ r \leq 2, h \in [1, 3]}} (r \cos \varphi \cdot r \sin \varphi + h) \cdot r d\bar{\omega} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_1^3 \frac{1}{2} r^3 \sin 2\varphi + hr dh dr d\varphi =$$

PRZYKŁAD B.

$$\iiint_{\substack{\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 4 \\ r \leq 4, r \leq h \leq 4}} z d\omega = \iiint_{\substack{\varphi \in [0, 2\pi] \\ r \leq 4, r \leq h \leq 4}} h \cdot r d\bar{\omega} = \int_0^{2\pi} \int_0^4 \int_r^4 hr dh dr d\varphi = \dots = 64\pi$$

PRZYKŁAD C.

Niech $S = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$ i $W = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq x\}$.
Oblicz objętość $S \cap W$.

$$\iiint_{S \cap W} 1 d\omega = \iiint_{\substack{\varphi \in [-\pi/2, \pi/2] \\ r \leq \cos \varphi, 0 \leq h \leq 1-r}} 1 \cdot r d\bar{\omega} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos \varphi} \int_0^{1-r} r dh dr d\varphi = \dots = \frac{\pi}{4} - \frac{4}{9}$$