

ANALIZA MATEMATYCZNA 3, NOTATKI Z WYKŁADU 12B

ŚCIAĞA. Zamiana zmiennych w całce podwójnej (zmiana układu współrzędnych)

$$\iint_P f(x, y) \, dx dy = \iint_{\vec{F}[P]} f(x(r, h), y(r, h)) \cdot |J| \, dr dh$$

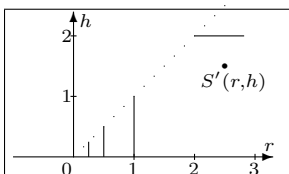
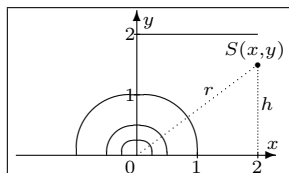
WYPEŁNIAŃKA (ODLOTOWA). Ziemia, to linia $y = 0$. Samolot nadlatuje nad lotnisko $L = (0, 0)$; jest w punkcie $S = (x, y) = (2, \frac{3}{2})$. Pilot odczytuje z przyrządów:

r – odległość od lotniska L , h – wysokość nad ziemią, co zapisuje: $S' = (r, h) = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$.

Oczywiście mamy tu zależność funkcyjną: $\vec{F}(S) = S'$, która parze liczb (x, y) przypisuje **parę** (r, h) według wzorów:

$$r = \sqrt{\dots\dots^2 + \dots\dots^2}, \quad h = \dots\dots$$

W tym przekształceniu obrazem półokręgu o środku $(0, 0)$ i promieniu 1 jest $\dots\dots$ o końcach $(\dots, \dots)$, $(\dots, \dots)$; obrazem odcinka $[0, 2] \times \{2\}$ jest odcinek o długości $\dots\dots$.



Dziedziną $\vec{F}$ jest $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$; zbiorem wartości jest obszar kąta o ramionach $\dots$ i $\dots$. $\vec{F}$ nie jest różnowartościowa, bo np.: $\vec{F}(\dots, \dots) = \vec{F}(\dots, \dots)$. Jednak $\vec{F}$ ograniczona do pierwszej ćwiartki ($\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$) jest '1-1' i przekształca ten zbiór na obszar $\dots\dots$. Zatem przy tym ograniczeniu (x, y) można wyznaczyć poprzez (r, h) wzorami:

$$x = x(r, h) = \sqrt{\dots\dots^2 - \dots\dots^2}, \quad y = y(r, h) = \dots\dots$$

Oznaczmy przez $\vec{G}(r, h) = (x, y)$ tę funkcję (odwrotną do ograniczenia funkcji $\vec{F}$), czyli traktujemy $x = x(r, h)$, $y = y(r, h)$. Jej jacobianem nazywamy wyznacznik:

$$J = \det \frac{D(x, y)}{D(r, h)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial h} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial h} \end{pmatrix} = \frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial y}{\partial h} - \frac{\partial x}{\partial h} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

i w tym przypadku mamy: $J = \dots\dots\dots$. (Uwaga. Jakobian zależy od $\dots$ i $\dots$). Ten wyznacznik mówi jak **lokalnie** zniekształcane jest pole przez funkcję $\vec{G}$.

PRZYKŁAD A. W tych nowych współrzędnych niektóre całki można łatwo obliczyć:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-x^2}} xy \, dy dx = \int \int_{\dots\dots} xy \, d\omega = \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{r^2 - h^2} \\ y = h \\ J = \dots\dots \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{\substack{1 \leq h \leq 2 \\ h \leq r \leq 2}} \sqrt{r^2 - h^2} h \cdot |J| \, d\bar{\omega} = \int_1^2 \int_h^2 hr \, dr dh = \dots = \frac{9}{8}.$$

'Blisko punktu' (r_0, h_0) funkcje $x(r, h)$, $y(r, h)$ przybliżamy płaszczyznami stycznymi:

$$x(r, h) \approx x(r_0, h_0) + \frac{\partial x}{\partial r}(r - r_0) + \frac{\partial x}{\partial h}(h - h_0),$$

$$y(r, h) \approx y(r_0, h_0) + \frac{\partial y}{\partial r}(r - r_0) + \frac{\partial y}{\partial h}(h - h_0),$$

gdzie pochodne cząstkowe są liczone w ustalonym punkcie (r_0, h_0) .

$$\text{Stąd} \quad \vec{G}(r, h) \approx \begin{pmatrix} x(r_0, h_0) + \frac{\partial x}{\partial r}(r - r_0) + \frac{\partial x}{\partial h}(h - h_0) \\ y(r_0, h_0) + \frac{\partial y}{\partial r}(r - r_0) + \frac{\partial y}{\partial h}(h - h_0) \end{pmatrix}.$$

Zatem $\vec{G}(r, h)$ jest przybliżane przez przekształcenie afiniczne. Jak wiadomo (AL), przekształcenie afiniczne zmienia pole w stosunku równym wyznacznikowi części liniowej przekształcenia, czyli w stosunku $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial h} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial h} \end{pmatrix}$, równym jacobianowi J .

PRZYKŁAD B.

$$\begin{aligned}
 \iint_{\substack{(x-3)^2 + 5(x+y)^2 \leq 1 \\ x \geq 3}} x - y \, d\omega &= \left\{ \begin{array}{l} s = x + \dots \\ t = \sqrt{5}(\dots) \\ J = \dots = 1/\sqrt{5} \end{array} \right\} = \\
 &= \iint_{\substack{s^2 + t^2 \leq 1 \\ s \geq 0}} ((s+3) - (-s-3+t/\sqrt{5})) \frac{\sqrt{5}}{5} \, d\bar{\omega} = \frac{\sqrt{5}}{5} \iint_{\substack{s^2 + t^2 \leq 1 \\ s \geq 0}} 2s + 6 - t/\sqrt{5} \, d\bar{\omega} = \\
 &= \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot 2 \cdot \left(\iint_{\substack{s^2 + t^2 \leq 1 \\ s \geq 0}} s \, d\bar{\omega} \right) + \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot 6 \cdot \left(\iint_{\substack{s^2 + t^2 \leq 1 \\ s \geq 0}} 1 \, d\bar{\omega} \right) - \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\iint_{\substack{s^2 + t^2 \leq 1 \\ s \geq 0}} t \, d\bar{\omega} \right) = \\
 &= \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot 2 \cdot \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 r \cos \varphi \cdot r \, dr \, d\varphi \right) + \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \pi 1^2 \right) - \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (0) = \\
 &= \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot 2 \cdot \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{3} \cos \varphi \, d\varphi \right) + \frac{3\sqrt{5}}{5} \pi - 0 = \frac{4}{15} \sqrt{5} + \frac{3\sqrt{5}}{5} \pi
 \end{aligned}$$

PRZYKŁAD C'.

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_0^{1-2\sqrt{x}+x} x+y+2\sqrt{xy} \, dy \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} s = \sqrt{x} \\ t = \sqrt{y} \\ J = \dots \end{array} \right\} = \int_0^1 \int_0^{1-s} (s+t)^2 4st \, dt \, ds = \begin{array}{l} \text{dalej już} \\ \text{tylko (?)} \\ \text{żmudnie} \end{array} = \\
 = \int_0^1 4s \left(\frac{s^2 t^2}{2} + \frac{2st^3}{3} + \frac{t^4}{4} \right)_{t=0}^{t=1-s} ds = \dots = \int_0^1 \frac{1}{3} (s^5 - 4s^2 + 3s) \, ds = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{9}.
 \end{aligned}$$

PRZYKŁAD C''. Może być nieco zaskakujące inne, poniższe podstawienie:

$$\int_0^1 \int_0^{1-2\sqrt{x}+x} x+y+2\sqrt{xy} \, dy \, dx = \left\{ \begin{array}{l} x = s \cdot \cos^4 t \\ y = s \cdot \sin^4 t \\ J = \det \begin{pmatrix} \cos^4 t & -4s \cos^3 t \sin t \\ \sin^4 t & 4s \sin^3 t \cos t \end{pmatrix} = 4s \sin^3 t \cos^3 t \end{array} \right\} =$$

(Pewną trudność sprawia tu wyznaczenie nowych granic całkowania.)

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} s \cdot |4s \sin^3 t \cdot \cos^3 t| \, dt \, ds = \int_0^1 4s^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cdot (1 - \sin^2 t) \cos t \, dt \, ds = \\
 &= 4 \int_0^1 s^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cdot \cos t - \sin^5 t \cdot \cos t \, dt \, ds = 4 \int_0^1 s^2 \left(\frac{1}{4} \sin^4 t - \frac{1}{6} \sin^6 t \right)_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} ds = \\
 &= 4 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \cdot \int_0^1 s^2 \, ds = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} s^3 \right)_0^1 = \frac{1}{9}
 \end{aligned}$$