

### ANALIZA MATEMATYCZNA 3, NOTATKI Z WYKŁADU 13A

Niech  $f(x, y)$  będzie określona na krzywej  $L \subseteq \mathbb{R}^2$ . Dla podziału  $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$  o długościach  $\Delta \ell_i$  i dla punktów  $(x_i, y_i) \in L_i$  tworzymy sumę  $\sum_{i \leq n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta \ell_i$ . Napis

$$\int_L f(x, y) d\ell \approx \sum_{i \leq n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta \ell_i$$

oznacza, że całka krzywoliniowa nieskierowana z  $f$  po  $L$  jest przybliżana przez owe sumy tym lepiej, im drobniejszy jest podział (dla 'porządných' funkcji i krzywych).

Całkę tę można interpretować wielorako, np. (pomyśl o jednostkach):

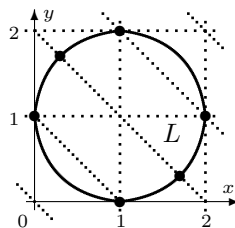
- jako pole płotu (jednej strony) ustawionego na linii  $L$  o sztachetach o szerokościach ..... i wysokościach  $f(x_i, y_i)$ ,
- jako cenę ułożenia rurociągu wzdłuż linii  $L$ , gdzie  $f(x_i, y_i)$  mówi o koszcie budowy jednego metra (milimetra?) w miejscu  $(x_i, y_i)$ ,
- jako minimalny czas przejazdu (**zgodny z przepisami!**) trasy  $L$ , gdzie  $f(x, y)$  podaje odwrotność ograniczenie maksymalnej szybkości w miejscu  $(x, y)$ ,
- .....

PRZYKŁADY. ('na palcach')

a) Okrąg  $L$  z rysunku obok jest podzielony na sześć części o długościach ..... , ..... , ..... , ..... , ..... , .....

Funkcja  $f(x, y) = [x + y]^2$  jest na tych częściach stała (niemal). Zatem wybierając punkty z tych części (poza kropkami) mamy:

$$\int_L [x + y]^2 d\ell = 9 \cdot \frac{\pi}{2} + 4 \cdot \frac{\pi}{4} + 1 \cdot \frac{\pi}{4} + 0 \cdot \frac{\pi}{2} + \dots \cdot \frac{\pi}{4} + \dots \cdot \frac{\pi}{4} = 7\pi.$$



b) Dla  $K = \text{brzeg } [0, 1]^2$  i  $f(x, y) = y + 1$ :

$$\begin{aligned} \int_K f(x, y) d\ell &= \int_{[0, 1] \times \{0\}} \dots d\ell + \int_{\{1\} \times [0, 1]} \dots d\ell + \int_{[0, 1] \times \{1\}} \dots d\ell + \int_{\{0\} \times [0, 1]} \dots d\ell = \\ &= \dots = 6. \end{aligned}$$

c) Dla  $V = \{(x, |x|) : |x| \leq 1\}$  i  $f(x, y) = \pi x + y\sqrt{3}$ :

$$\begin{aligned} \int_V f(x, y) d\ell &= \pi \cdot \int_V \dots d\ell + \dots \cdot \int_V \dots d\ell = \\ &= \dots + \dots = \sqrt{6}. \end{aligned}$$

d)  $\int_{\substack{x^2 + y^2 = 1 \\ x, y \geq 0}} \arcsin y ds = \dots = \frac{1}{8}\pi^2.$

Tw. Gdy  $L$  ma parametryzację  $(x(t), y(t))$ ,  $t \in [a, b]$  klasy  $\mathcal{C}^1$  i  $f$  jest ciągła na  $L$ ,

$$\text{to } \int_L f(x, y) d\ell = \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \int_L f(x, y) d\ell &\approx \sum_{i \leq n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta \ell_i \approx \text{istnieją } a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \text{ takie, że} \\ &\approx \sum_{i \leq n} f(x(t_i), y(t_i)) \cdot \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} = \\ &= \sum_{i \leq n} f(x(t_i), y(t_i)) \cdot \sqrt{\left(\frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2 + \left(\frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2} \cdot (t_i - t_{i-1}) = \\ &= \sum_{i \leq n} f(x(t_i), y(t_i)) \cdot \sqrt{(x'(\hat{t}_i))^2 + (y'(\hat{t}_i))^2} \cdot \Delta t_i \approx \quad (\text{z tw. Lagrange'a}) \\ &\approx \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \quad \square \end{aligned}$$

PRZYKŁAD.

a) Dla  $L = \{(x, x^2) : x \in [0, 1]\}$  z parametryzacją:  $x = t, y = \dots, t \in [\dots, \dots]$ :

$$\int_L \frac{y^3}{\sqrt{1+4x^2}} dl = \int_0^1 \frac{t^6}{\sqrt{1+4t^2}} \cdot \sqrt{(\dots)^2 + (\dots)^2} dt = \dots = \frac{1}{7}.$$

$$\text{b)} \quad \int_{\substack{x^2+y^2=4 \\ y \leq 0}} \sin(x^9) + 2y^2 dl = \int_{\substack{x^2+y^2=4 \\ y \leq 0}} \sin(x^9) dl + \int_{\substack{x^2+y^2=4 \\ y \leq 0}} 2y^2 dl = \dots = 8\pi.$$

Tw. Gdy  $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \Gamma, \vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$  jest gładką 1-1 parametryzacją łuku  $\Gamma$ ,

to

$$\int_{\Gamma} f dl = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

WNIOSEK. Gdy  $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \Gamma, \vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$  jest gładką parametryzacją (jednokrotną) łuku  $\Gamma$ , to długość tego łuku można opisać całką:

$$|\Gamma| = \int_{\Gamma} 1 dl = \int_a^b 1 \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

PRZYKŁAD. Gdy  $\Gamma$  jest łamaną  $ABC$ , gdzie  $A(0, 1, 0), B(2, 2, 3), C(2, 2, 1)$ , to parametryzujemy oddzielnie odcinki  $\overline{AB}$  i  $\overline{BC}$  np.

$$\vec{r}_{AB} : [0, 1] \rightarrow \overline{AB}, \vec{r}_{AB} = (2t, \dots + t, 3t) \text{ i } \vec{r}_{BC} : [0, 2] \rightarrow \overline{BC}, \vec{r}_{BC} = (2, \dots, 3 - t).$$

Wtedy  $\int_{\Gamma} \dots = \int_{\overline{AB}} \dots + \int_{\overline{BC}} \dots$ , czyli

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} 2e^{y-1} + 2z dl &= \int_0^1 (2e^t + 6t) \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} dt + \int_0^2 (2e^1 + 6 - 2t) \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + (-1)^2} dt = \\ &= \sqrt{14} \cdot [2e^t + 3t^2]_0^1 + [(2e + 6)t - t^2]_0^2 = (2e + 1)\sqrt{14} + 4e + 8. \end{aligned}$$

CAŁKA POWIERZCHNIOWA NIEZORIENTOWANA

Niech  $f(x, y, z)$  będzie określona na powierzchni  $S$ . Podział  $\omega = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$  powierzchni  $S$  na 'prawie rozłączne płyty' o polach  $|S_i|$  i wybór punktów  $a_i \in S_i$  wyznacza pewne przybliżenie **całki powierzchniowej nieorientowanej**:

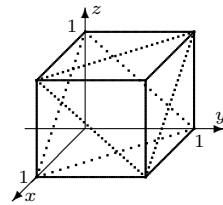
$$\iint_S f(x, y, z) dS \approx \sum_{i=1}^m f(a_i) \cdot |S_i|$$

Dokładniej: jeśli dla coraz drobniejszych podziałów (o średnicach zbieżnych do 0) sumy po prawej stronie są coraz bliżej pewnej liczby (niezależnie od wyboru punktów), to tę liczbę nazywamy całką powierzchniową nieorientowaną funkcji  $f$  po powierzchni  $S$ .

INTERPRETACJE.  $\iint_S f(x, y, z) dS$  :

- masa powierzchni  $S$ , której gęstość w punkcie  $(x, y, z)$  ma wartość  $f(x, y, z)$  [kg/m<sup>2</sup>],
- koszt wyłożenia pow.  $S$  kafelkami, których cena w  $(x, y, z)$  wynosi  $f(x, y, z)$  [zł/m<sup>2</sup>].

1. Na powierzchni  $S$  sześcianu  $[0, 1]^3$   $f(x, y, z) = [x + y + z] \cdot \pi$  przyjmuje wartości:  $0 \cdot \pi, 1 \cdot \pi, \dots$ . Zatem  
 $\iint_S [x + y + z] \cdot \pi \, dS = (0 \cdot \pi) \cdot (3 \cdot \frac{1}{2}) + \dots = \dots$



Dla funkcji  $f(x, y, z) = [z] \cdot [y + 7]$  mamy:

$$\iint_S [z] \cdot [y + 7] \, dS = \iint [z] \cdot [y + 7] \, dS = \dots$$

Tw. Jeśli powierzchnia  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  jest wykresem funkcji gładkiej  $g(x, y)$  określonej na obszarze  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , czyli gdy  $S = \{(x, y, z) : z = g(x, y), (x, y) \in D\}$ , to całkę powierzchniową z funkcji  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  zamieniamy na całkę podwójną

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \, d\omega.$$

2.  $S = \{(x, y, z) : 2x + 3y + z = 6, x, y, z \geq 0\}$  jest wykresem f-cji  $g(x, y) = 6 - 2x - \dots$  o dziedzinie  $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, \dots \leq y \leq \dots\}$ ; zatem

$$\iint_S (z - 6)^2 \, dS = \iint_D ((6 - 2x - 3y) - 6)^2 \cdot \sqrt{1 + (-2)^2 + \dots} \, d\omega = \dots = 54\sqrt{14}$$

3. Półsfera  $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 2z, z \geq 1\}$  jest wykresem funkcji  $g(x, y) = \dots$  o dziedzinie  $D = \{(x, y) : \dots\}$ ; zatem

$$\iint_S z \, dS = \iint_D (\dots) \cdot \sqrt{1 + (\dots)^2 + (\dots)^2} \, d\omega = \dots = 3\pi$$

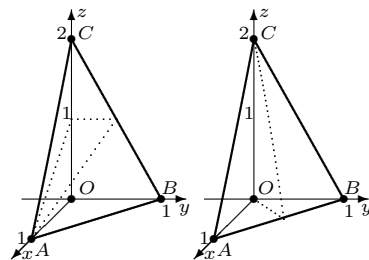
4. Dla brzegu  $S$  czworoboku  $OABC$  (p.rys.) poniższe całki powierzchniowe można obliczyć 'na palcach':

a)  $\iint_S e^{[x+y]} \, dS = \dots = e^0 \cdot |S| = \dots$

b)  $\iint_S e^{[x-y]} \, dS = \dots$

c)  $\iint_S e^{[x+z]} \, dS = \dots$

d)  $\iint_S e^{[x+y+z]} \, dS = \dots$



Do których całek pomocne są rysunki (z prawej)?

4'. Oblicz. (Poniższe całki opisują objętości pewnych ostrosłupów; opisz je (słowami).)

e)  $\iint_{ABC} z \, dS = \{\text{obj. ostrosłupa o podstawie } \Delta ABC \text{ i wysokości } 2\} = \dots$

f)  $\iint_{ABC} x \, dS = \dots$

g)  $\iint_{ABC} x + y \, dS = \dots$

5. Oblicz  $\iint_{\substack{z+x^2+y^2=1 \\ z \geq 0}} \sqrt[3]{1+4x^2+4y^2} \, dS = \dots = \frac{3}{22}\pi(5^{11/6} - 1).$