

ANALIZA MATEMATYCZNA 3, NOTATKI Z WYKŁADU 13B

Bywa, że złoty łańcuszek jest na tyle cienki, że chcemy go uważać za okrąg L

$$L: \quad x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Jednak waga nam mówi, że ogniwa nie są jednakowe. Dokładniej jego gęstość (gęstość liniowa) jest równa $g(x, y) = 3y^2$, to znaczy, dla małego kawałeczka iloraz masy przez długość jest równy $3y^2$. Wtedy masa całego łańcuszka jest równa $M = \int_L g(x, y) dl$.

Podobnie rzecz się ma ze srebrną paterą S

$$S: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \leq 0.$$

Waga w środku jest dużo większa niż przy brzegach (jest tam grubsza), np. jej gęstość (gęstość powierzchniowa) jest równa: $g(x, y, z) = 7|z|$, to znaczy dla małego kawałeczka iloraz masy przez pole powierzchni jest równy $7|z|$. Wtedy masa całej paterki jest równa $M = \iint_S g(x, y, z) dS$.

A jak to jest z masą niejednorodnego trójkąta w $\mathbb{R}^2$ czy czworościanu w $\mathbb{R}^3$?

Podobnie (ale już wystarczy 'zwykła' całka podwójna czy potrójna).

Przykład A.

Znajdź masę M pierwszego zwoju linii śrubowej $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, gdy gęstość w każdym punkcie jest proporcjonalna do kwadratu odległości od $(0, 0, 0)$.

$$\begin{aligned} M &= \int_L g(x, y, z) dl = \int_L k(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^2 dl = \\ &= \int_0^{2\pi} k(\sqrt{(a \cos t)^2 + (a \sin t)^2 + (bt)^2})^2 \cdot \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + (b)^2} dt = \dots \\ &= k\sqrt{a^2 + b^2} 2\pi(a^2 + \frac{4}{3}b^2\pi^2). \end{aligned} \quad \square$$

UMOWA. Poniżej 'wyznaczyć' oznacza 'zapisać jako całkę iterowaną lub sumę całek iterowanych w ukł. kartezjańskim i/lub cylindrycznym (biegunowym)'.

Przykład B. Niech S oznacza stożek o wysokości 1 i promieniu podstawy 1.

Niech W oznacza walec o średnicy podstawy równej 1 i wysokości 1, którego podstawa leży na podstawie stożka i na którego powierzchni bocznej leży wysokość stożka.

Niech $V = S \cap W$. Zapisz jako całkę (lub sumę całek) iterowanych:

a) objętość V $2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \varphi} (1-r) r dr d\varphi = \dots = \frac{\pi}{4} - \frac{4}{9}$

b) pole powierzchni V

c) długość 'krawędzi' V , to znaczy zbioru tych punktów powierzchni V , które nie są gładkie (w których nie ma płaszczyzny stycznej do powierzchni).

Tw. Gdy L ma parametryzację $(x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ klasy $\mathcal{C}^1$ i f jest ciągła na L ,

$$\text{to} \quad \int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Tw. Gdy $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \Gamma$, $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$ jest gładką parametryzacją łuku Γ ,

$$\text{to} \quad \int_\Gamma f ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

Tw. Jeśli powierzchnia S jest wykresem funkcji gładkiej $g(x, y)$ określonej na obszarze $D \subseteq \mathbb{R}^2$, czyli gdy $S = \{(x, y, z) : z = g(x, y), (x, y) \in D\}$, to całkę powierzchniową z funkcji $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ zamieniamy na całkę podwójną:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} d\omega$$

Przykład C. Niech T oznacza trójkąt o wierzchołkach $(1,0,0), (1,1,0), (0,0,3)$. Wyznacz jego masę gdy gęstość $g = g(x, y, z)$ jest proporcjonalna do kwadratu odległości od punktu $(1,1,0)$ i ma największą wartość równą 7

$$\text{gęstość } g = g(x, y, z) = k \cdot \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2}^2.$$

$$7 = \sup g[T] = g(0, 0, 3), \quad (\text{argument za ostatnią równością daje geometria})$$

zatem

$$7 = k \cdot \sqrt{(0-1)^2 + (0-1)^2 + 3^2}^2$$

skąd

$$k = \frac{7}{11}.$$

Dalej zauważmy, że T jest wykresem funkcji $z = z(x, y) = 3 - 3x$ o dziedzinie będącej trójkątem $D \subseteq \mathbb{R}^2$ o wierzchołkach $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$.

$$\begin{aligned} M &= \iint_T g(x, y, z) dS = \iint_T \frac{7}{11} \cdot \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2}^3 dS = \\ &= \iint_D \frac{7}{11} \cdot \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (3-3x)^2}^2 \cdot \sqrt{1 + (-3)^2 + (0)^2} d\omega = \\ &= \frac{7\sqrt{10}}{11} \cdot \int_0^1 \int_0^x \sqrt{10(x-1)^2 + (y-1)^2}^2 dy dx = \dots = \frac{7\sqrt{10}}{4}. \quad \square \end{aligned}$$

Przykład D. Niech trójkąt z Przykładu C. obraca się w stałym tempie 3 obrotów na sekundę wokół osi OZ . Wyznacz jego energię kinetyczną.

'Mały' kawałeczek ΔT z punktu (x, y, z) ma szybkość $v = 3 \cdot 2\pi \sqrt{x^2 + y^2}$, bo w ciągu sekundy przebywa drogę $3 \cdot 2\pi \sqrt{x^2 + y^2}$. Ma masę $\Delta M = g(x, y, z) \cdot |\Delta T|_{pole}$. Zatem wnosi do energii kinetycznej wartość $\frac{1}{2} \cdot \Delta M \cdot v^2$.

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \iint_T \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 2\pi \sqrt{x^2 + y^2})^2 \cdot \frac{7}{11} \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2}^2 dT = \\ &= \iint_D \frac{126}{11} \pi^2 \cdot (x^2 + y^2) \cdot \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (3-3x)^2}^2 \cdot \sqrt{1 + (-3)^2 + (0)^2} d\omega = \\ &= \frac{126}{11} \pi^2 \sqrt{10} \cdot \int_0^1 \int_0^x (x^2 + y^2) \cdot \sqrt{10(x-1)^2 + (y-1)^2}^2 dy dx = \frac{91}{\sqrt{10}} \pi^2 \quad (\text{wg Maximy}) \end{aligned}$$

Tw. Jeśli powierzchnia S jest wykresem funkcji gładkiej $g(x, y)$ określonej na obszarze $D \subseteq \mathbb{R}^2$, czyli gdy $S = \{(x, y, z) : z = g(x, y), (x, y) \in D\}$, to całkę powierzchniową z funkcji $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ zamieniamy na całkę podwójną:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} d\omega$$

Przykład E. Półsfera S ma w danym punkcie gęstość równą kwadratowi odległości od osi symetrii. Wyznacz środek masy S .

Możemy przyjąć, że $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ jest wykresem funkcji $z = z(x, y) = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ o dziedzinie $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Wtedy gęstość $g = g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Przy takiej gęstości środek masy leży oczywiście na osi symetrii (czyli na osi OZ). Niech s oznacza trzecią współrzędną środka masy S .

Mamy: $s = \frac{1}{M} \iint_S z \cdot g(x, y, z) dS$, gdzie $M = \iint_S g(x, y, z) dS$

Obliczamy:

$$\begin{aligned} M &= \iint_S g(x, y, z) dS = \iint_D (x^2 + y^2) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2} d\omega = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}} dr d\varphi = 2\pi \cdot \int_0^1 \frac{r(r^2-1)+r}{\sqrt{1-r^2}} dr = \dots = \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

Dalej:

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{M} \iint_S z \cdot g(x, y, z) dS = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi} \iint_S \sqrt{1-x^2-y^2} \cdot (x^2 + y^2) dS = \\ &= \frac{1}{\frac{4}{3}\pi} \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} \cdot (x^2 + y^2) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2} d\omega = \\ &= \frac{1}{\frac{4}{3}\pi} \iint_D (x^2 + y^2) d\omega = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot r dr d\varphi = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Odp. Środek masy S leży na osi symetrii w odległości $\frac{5}{8}$ od sfery, po 'wewnętrznej' stronie sfery. $\square$