

ANALIZA MATEMATYCZNA 3, NOTATKI 14A

CAŁKA KRZYWOLINIOWA SKIEROWANA

Napis $\int_{\Gamma} \vec{F} \circ d\vec{r}$ oznacza całkę krzywoliniową z pola $\vec{F}$ po krzywej skierowanej Γ .

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \circ d\vec{r} \approx \sum_{i=1}^n \vec{F}(\vec{r}_i) \circ (\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}),$$

gdzie punkty $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ leżą na krzywej Γ zgodnie z jej skierowaniem.

Przybliżenie jest tym lepsze, im 'gęściej' te punkty leżą na krzywej.

Interpretacja fizyczna: praca...

PRZYKŁAD. Dla $\vec{F}(x, y) = (xy, x^2)$, $\Gamma = \{(x, x^2) : x \in [0, 1]\}$ i $\vec{r}_i = \left(\frac{i}{n}, \left(\frac{i}{n}\right)^2\right)$ mamy

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{F} \circ d\vec{r} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{F}(\vec{r}_i) \circ (\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i^3}{n^3}, \frac{i^2}{n^2} \right) \circ \left(\frac{1}{n}, \frac{2i-1}{n^2} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i^3}{n^4} + \frac{2i^3 - i^2}{n^4} \right) = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \left(3 \sum_{i=1}^n i^3 - \sum_{i=1}^n i^2 \right) = \text{z Wolframem} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \cdot \frac{1}{12} n(n+1)(9n^2 + 5n - 2) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Inne oznaczenia: dla $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$,

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \circ d\vec{r} = \int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\Gamma} P dx + Q dy$$

Tw. Gdy $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \Gamma$, $\vec{r} = (x(t), y(t))$ jest gładką parametryzacją łuku Γ , to

$$\int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b P(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} dt.$$

PRZYKŁAD C.D. Dla $\vec{F}(x, y) = (xy, x^2)$, $\Gamma = \{(t, t^2) : t \in [0, 1]\}$ mamy

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \circ d\vec{r} = \int_{\Gamma} xy dx + x^2 dy = \int_0^1 t \cdot t^2 \frac{dx}{dt} + t^2 \frac{dy}{dt} dt = \int_0^1 t \cdot t^2 \cdot 1 + t^2 \cdot 2t dt = \dots = \frac{3}{4}$$

PRZYKŁAD. (po innej krzywej) Dla $\vec{F}(x, y) = (xy, x^2)$, $\Gamma_2 = \{(t, t) : t \in [0, 1]\}$ mamy

$$\int_{\Gamma_2} \vec{F} \circ d\vec{r} = \int_{\Gamma_2} xy dx + x^2 dy = \int_0^1 t \cdot t \frac{dx}{dt} + t^2 \frac{dy}{dt} dt = \int_0^1 t^2 \cdot 1 + t^2 \cdot 1 dt = \dots = \frac{2}{3}$$

Dowód (szkic)

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \circ d\vec{r} \approx \sum_i \vec{F}_i \circ \Delta \vec{r}_i \stackrel{*}{=} \sum_i \vec{F}_i \circ \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \Delta t_i \right) = \sum_i \left(\vec{F}_i \circ \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) \cdot \Delta t_i \approx \int_a^b P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} dt,$$

gdzie za 'wężyki' odpowiadają definicje, a za $\stackrel{*}{=}$ – pojęcie wektora prędkości. $\square$

Dowód. (TEN SAM co powyżej! TEŻ szkic!)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &\approx \\ &\approx \sum_{i < n} (P(x(t_i)), y(t_i), Q(x(t_i), y(t_i))) \circ (x(t_{i+1}) - x(t_i), y(t_{i+1}) - y(t_i)) = \\ &= \sum_{i < n} P(x(t_i), y(t_i)) \cdot (x(t_{i+1}) - x(t_i)) + Q(x(t_i), y(t_i)) \cdot (y(t_{i+1}) - y(t_i)) = \\ &= \sum_{i < n} \left(P(x(t_i), y(t_i)) \cdot \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{\Delta t} + Q(x(t_i), y(t_i)) \cdot \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{\Delta t} \right) \Delta t = \\ &= \sum_{i < n} (P(x(t_i), y(t_i)) \cdot x'(\bar{t}_i) + Q(x(t_i), y(t_i)) \cdot y'(\bar{t}_i)) \Delta t \approx \\ &\approx \int_a^b P(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} dt. \end{aligned} \quad \square$$

Dla pola $\vec{F} = (P, Q)$, gdzie $P(x, y) = x + y$, $Q(x, y) = 2y$ i okręgu jednostkowego L mamy

- przy parametryzacji $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$:

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t) \cdot (-\sin t) + (2 \sin t) \cdot \cos t \, dt = \dots = -\pi$$

- przy **innej** parametryzacji L_1 : $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$, $\pi \leq t \leq 3\pi$

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_\pi^{3\pi} (\sin t + \cos t) \cdot (\cos t) + (2 \cos t) \cdot (-\sin t) \, dt = \dots = \pi$$

DLACZEGO inny wynik?! Bowiem...

- przy **innej** parametryzacji L_2 : $x(t) = \cos t^2$, $y(t) = \sin t^2$, $0 \leq t \leq \sqrt{2\pi}$

$$\int_{L_2} Pdx + Qdy = \int_0^{\sqrt{2\pi}} (\cos t^2 + \sin t^2) \cdot (-2t \sin t^2) + (2 \sin t^2) \cdot \cos t^2 \, dt = \dots = -\pi$$

Ogólnie: gdy Γ oznacza łuk od A do B (gdzie porządek jest wyznaczony przez pewną parametryzację), to przez $-\Gamma$ rozumiemy ten sam zbiór punktów, ale uporządkowany przeciwnie: od B do A ; wtedy $\int_{-\Gamma} P \, dx + Q \, dy + R \, dz = - \int_{\Gamma} P \, dx + Q \, dy + R \, dz$.

Gdy $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \Gamma$, $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$ jest gładką parametryzacją łuku Γ , to całkę skierowaną zamieniamy na 'zwykłą': $\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_a^b P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \frac{dz}{dt} \, dt$

PRZYKŁAD. Gdy Γ jest łamaną ABC , gdzie $A(0, 1, 0), B(2, 2, 3), C(2, 2, 1)$, to parametryzujemy oddzielnie AB i BC np. $\vec{r}_{AB}: [0, 1] \rightarrow \overline{AB}$, $\vec{r}_{AB} = (2t, 1 + t, 3t)$ i $\vec{r}_{BC}: [0, 2] \rightarrow \overline{BC}$, $\vec{r}_{BC} = (2, 2, 3 - t)$. Wtedy $\int_{\Gamma} \dots = \int_{\overline{AB}} \dots + \int_{\overline{BC}} \dots$ i

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} z^2 dx + xz dy + ydz &= (\int_{\overline{AB}} z^2 dx + xz dy + ydz) + (\int_{\overline{BC}} z^2 dx + xz dy + ydz) = \\ &= \int_0^1 (3t)^2 \cdot 2 + 2t \cdot 3t \cdot 1 + (1 + t) \cdot 3 \, dt + \int_0^2 (3 - t)^2 \cdot 0 + 2 \cdot (3 - t) \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \, dt = \\ &= \int_0^1 24t^2 + 3t + 3 \, dt + \int_0^2 -2 \, dt = [8t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 3t]_0^1 + [-2t]_0^2 = 12,5 + (-4) = 8,5. \end{aligned}$$