

ANALIZA MATEMATYCZNA 3, NOTATKI 14.B

$f(x, y)$ nazywamy potencjałem pola wektorowego $\vec{F} = (P, Q)$, gdy $P = \frac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$.

$f(x, y, z)$ nazywamy potencjałem pola wektorowego $\vec{F} = (P, Q, R)$, gdy $\vec{F} = \text{grad}(f)$.

Czy pole wektorowe ma potencjał? Czasami można... odgadnąć takie f , spróbuj:

- a)** $\vec{F}(x, y) = (x, y)$ **b)** $\vec{F}(x, y) = (y, x)$ **c)** $\vec{F}(x, y) = (x^2, y^2)$
d) $\vec{F}(x, y) = (y^2, x^2)$ **e)** $\vec{F}(x, y) = (xy^2, x^2y + y^3)$ **f)** $\vec{F}(x, y) = (ye^x, e^x)$
g) $\vec{F}(x, y) = (e^x - \sqrt{2}, \frac{1}{1+y^2} + \pi)$ **h)** $\vec{F}(x, y, z) = (2xyz, x^2z, x^2y + 1)$
i) $\vec{F}(x, y) = (e^y, xe^y + y)$ **j)** $P(x, y) = y^2e^{xy}$, $Q(x, y) = (1 + xy)e^{xy}$
k) $\vec{F}(x, y, z) = (2xyz, x^2z, x^2y + 1)$ **l)** $P = yz$, $Q = xz$, $R = xy$
m) $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xz + 1, 2y(z + 1), x^2 + y^2 + 3z^2)$ **n)** $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, z, y)$

Odp. **a)** $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, **d)** brak, **h)** $f(x, y, z) = x^2yz + z$, **n)** $f(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + yz$

Twierdzenie 1. Gdy $\vec{F} = \text{grad } f$ i $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \Gamma$ jest gładką parametryzacją łuku Γ skierowanego od $A = \vec{r}(a)$ do $B = \vec{r}(b)$, to

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \circ d\vec{r} = f(B) - f(A)$$

Innymi słowy: jeśli pole wektorowe ma potencjał f , to całka skierowana od A do B nie zależy od drogi, a tylko od jej końców; jest równa różnicy potencjałów $f(B) - f(A)$.

Przykład.

Gdy $\vec{F}(x, y) = (2xy^2, 2x^2y)$, Γ krzywa od $A = (5, 2)$ do $B = (9, 1)$, to

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \circ d\vec{r} \underset{\substack{f(x,y)=x^2y^2 \\ F=\text{grad}f}}{=} f(B) - f(A) = 9^2 \cdot 1^2 - 5^2 \cdot 2^2 = -19$$

Przykład.

Gdy $\vec{F}(x, y) = (y \cos xy, x \cos xy)$ i Γ krzywa od $A = (\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{3})$ do $B = (\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$,

to $\int_{\Gamma} \vec{F} \circ d\vec{r} = \dots = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$

Zadanie.

Niech f, g, h będą ciągłymi funkcjami **jednej** zmiennej. Udowodnij, że całka $\int_{\Gamma} f(x)dx + g(y)dy + h(z)dz$ nie zależy od drogi Γ (zależy tylko od początku i końca).

Twierdzenie 1⁻¹. Gdy pole $\vec{F}$ ma własność: całki z pola wektorowego po dowolnej krzywej od A do B są jednakowe, dla wszystkich $A, B \in \mathbb{R}^m$, to $\vec{F}$ ma potencjał.

Dowód.

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \circ d\vec{r} = \int_a^b P(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} dt =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} dt =$$

$$= [f(x(t), y(t))]_a^b = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a)) = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)). \quad \square$$

TWIERDZENIE GREENA. Niech Γ będzie krzywą płaską skierowaną dodatnio (przeciwnieżygarowo) ograniczającą obszar Ω bez 'dziur' i niech $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ będzie polem wektorowym określonym na Ω , gdzie P, Q są klasy $\mathcal{C}^1$. Wtedy

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\omega \quad \text{wersja [rot]}$$

oraz

$$\int_{\Gamma} -Q dx + P dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) d\omega \quad \text{wersja [div]}$$

DOWÓD? Piękny! ZASTOSOWANIA? Jeszcze bardziej.

PRZYKŁAD 1. Niech $\vec{F} = (\cos e^x - y, 3x + \sin(y^3 + y))$, $\Gamma = \{(x, y); x^2 + y^2 = 4\}$ skierowany dodatnio. Wtedy:

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \circ d\vec{r} = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \frac{\partial(3x+\sin(y^3+y))}{\partial x} - \frac{\partial(\cos e^x - y)}{\partial y} d\omega = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} 3 - (-1) d\omega = 4 \cdot \pi 2^2$$

UWAGA. Ten sam wynik otrzymamy dla $\vec{F}(x, y) = (-y + \cos ik(x), 3x + \text{jakiesik}(y))$.

PRZYKŁAD 2. Dla $\vec{F}(x, y) = (x^4 + y, 4x + \sin y^2)$, $K = \{(x, y); x^2 + y^2 = 4, y \geq 0\}$ skierowanej od $(2, 0)$ do $(-2, 0)$.

Tu nie można wprost zastosować tw.G., bo K nie ogranicza żadnego obszaru. Można ją uzupełnić, np. odcinkiem od $A = (-2, 0)$ do $B = (2, 0)$. Łącznie te dwie krzywe ograniczają półkole $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$. Wtedy:

$$\int_K \vec{F} \circ d\vec{r} + \int_{AB} \vec{F} \circ d\vec{r} = \iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} d\omega,$$

skąd

$$\begin{aligned} \int_K \vec{F} \circ d\vec{r} &= \iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} d\omega - \int_{AB} \vec{F} \circ d\vec{r} = \\ &= \iint_{\Omega} 4 - 1 d\omega - \int_{-2}^2 (t^4 + 0) \cdot 1 + (4t + \sin 0) \cdot 0 dt = \quad \text{tu } AB : \left\{ \begin{matrix} x=t \\ y=0 \end{matrix}, t \in [-2, 2] \right\} \\ &= 3 \cdot \frac{1}{2} \pi 2^2 - \left(\frac{1}{5} t^5 \right)_{-2}^2 = 6\pi - \frac{64}{5} \quad \square \end{aligned}$$

PRZYKŁAD 3. $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$, $\Omega = \{(x, y); 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$,

(tu brzeg Ω to DWA okręgi; JAK tu określić skierowanie???)

$$\int_K \vec{F} \circ d\vec{r} = \dots$$