

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. NOTATKI 14. POLA WEKTOROWE

Niech $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Funkcję $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ nazywać będziemy polem wektorowym.

Na przykład dla $F(x, y) = (x + y, x^2)$ mamy $F(2, 1) = (3, 4)$ i $F(1, 3) = (4, 1)$.

Graficznie można przedstawiać F następująco:

w punkcie (x, y) zaczepiamy wektor (strzałkę) o współrzędnych $F(x, y)$,
czyli np.:

w punkcie $(2, 1)$ jest początek strzałki o współrzędnych $(3, 4)$,

w punkcie $(1, 3)$ jest początek strzałki o współrzędnych $(4, 1)$.

ZADANIE 1.

Na następnej stronie jest kilkanaście rysunków pól wektorowych.

Dopasuj podane wzory do odpowiednich rysunków.

DEFINICJA.

$f(x, y)$ nazywamy potencjałem pola wektorowego $\vec{F} = (P, Q)$, gdy $P = \frac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$.

$f(x, y, z)$ nazywamy potencjałem pola wektorowego $\vec{F} = (P, Q, R)$, gdy $\vec{F} = \text{grad}(f)$.

ZADANIE 2.

Czy pole wektorowe ma potencjał? Czasami można... odgadnąć takie f , spróbuj:

a) $\vec{F}(x, y) = (x, y)$ **b)** $\vec{F}(x, y) = (y, x)$ **c)** $\vec{F}(x, y) = (x^2, y^2)$

d) $\vec{F}(x, y) = (y^2, x^2)$ **e)** $\vec{F}(x, y) = (xy^2, x^2y + y^3)$ **f)** $\vec{F}(x, y) = (ye^x, e^x)$

g) $\vec{F}(x, y) = (e^x - \sqrt{2}, \frac{1}{1+y^2} + \pi)$ **h)** $\vec{F}(x, y, z) = (2xyz, x^2z, x^2y + 1)$

i) $\vec{F}(x, y) = (e^y, xe^y + y)$ **j)** $P(x, y) = y^2e^{xy}$, $Q(x, y) = (1 + xy)e^{xy}$

k) $\vec{F}(x, y, z) = (2xyz, x^2z, x^2y + 1)$ **l)** $P = yz$, $Q = xz$, $R = xy$

m) $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xz + 1, 2y(z + 1), x^2 + y^2 + 3z^2)$ **n)** $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, z, y)$

o) $\vec{F}(x, y, z) = (xz, yz, xz)$ **p)** $\vec{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$

Odp. **a)** $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, **d)** brak, **h)** $f(x, y, z) = x^2yz + z$, **n)** $f(x, y, z) = \frac{1}{2}x + yz$

