

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. WYKŁAD 3C. (Wypełnianie - 'sklejanie' funkcji)

Jak wygląda wykres funkcji $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 3 & \text{dla } x^2 + y^2 \leq 4^2 \\ \sqrt{25 - x^2 - y^2} & \text{dla } x^2 + y^2 > 4^2 \end{cases}$?

W pierwszym napisie $\frac{1}{2}x + 3$ rozpoznajemy równanie $z = \frac{1}{2}x + 3$, ale nie jest to cała lecz tylko jej część 'żyjąca' nad kołem $x^2 + y^2 \leq 4^2$. Uwaga: ta część nie jest kołem, lecz (bo).

W napisie $\sqrt{25 - x^2 - y^2}$ rozpoznajemy równanie $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, ale nie jest to cała lecz tylko jej część 'żyjąca' nad $4^2 < x^2 + y^2 \leq 5^2$.

Zatem f jest 'sklecona' z dwóch funkcji; wykres f jest sumą wykresów dwóch funkcji:
 $a(x, y) = \frac{1}{2}x + 3$, o dziedzinie $D_a = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4^2\}$ (pełne koło, z brzegiem),
 $b(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, o dziedzinie $D_b = \{(x, y) : 4^2 < x^2 + y^2 \leq 5^2\}$ (.....).

Wydaje się, że wykresy funkcji a, b dotykają się (ale przecież są rozłączne, bo rozłączne są ich). Zatem co nam się wydaje?

Wydaje się, że wykresy f-cji a, b przecinają się w punktach $(0, -4, 3)$, $(0, 4, 3)$.

Zajmijmy się punktem $(0, 4, 3)$.

Nie należy on do wykresu funkcji b (bo), ale
 jeśli zbliżamy się punktami $(x, y) \in D_b$ do $(0, 4)$, to wartości $b(x, y)$ są coraz bliższe 3.
 co formalnie oznaczmy: $\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 4) \\ (x, y) \in D_b}} b(x, y) = 3$.

Zatem f w pobliżu $(0, 4)$ z 'każdej strony' 'ładnie' się zachowuje;
 jeśli zbliżamy się punktami (x, y) do $(0, 4)$, to wartości $f(x, y)$ są coraz bliższe $f(0, 4)$.

To, co widzimy/czujemy nazywa się ciągłością funkcji f w punkcie $(0, 4)$,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 4)} f(x, y) = f(0, 4)$$

Nietrudno odgadnąć, że zbiór wszystkich punktów, w których f jest ciągła jest równy

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 5^2, x^2 + y^2 \neq 4^2\} \cup \{(0, 4), (0, -4)\}.$$

* * *

Jak wygląda wykres $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y^2 & \text{dla } x^2 + y^2 \leq 4 \\ 5 - (x^2 + y^2) & \text{dla } x^2 + y^2 > 4 \end{cases}$?

Wykres funkcji f jest sumą wykresów funkcji:

$a(x, y) = x^2 - y^2$ określona na $D_a = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$ (pełne koło, z brzegiem),
 $b(x, y) = 5 - (x^2 + y^2)$, określona na zewnątrz koła: $D_b = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 4\}$.

Zbiór punktów ciągłości f jest równy $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\}) \cup \{.....\}$.

