

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. NOTATKI Z WYKŁADU 4A

DEF. Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Pochodne cząstkowe f w punkcie $(x_0, y_0) \in D$ określamy wzorami:

$$f'_x(x_0, y_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}, \quad f'_y(x_0, y_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Inne oznaczenia: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$.

PRZYKŁAD A. Dla $f(x, y) = x^4 y^3 + \sin(xy^2)$ mamy

$$f'_x(\pi, 1) = (4x^3 y^3 + \cos(xy^2) \cdot y^2)_{\substack{x=\pi \\ y=1}} = 4\pi^3 \cdot 1 + \cos(\pi) \cdot 1^2 = 4\pi^3 \dots\dots,$$

$$f'_y(\pi, 1) = (3x^4 y^2 + \cos(xy^2) \cdot 2xy)_{\substack{x=\pi \\ y=1}} = 3\pi^4 + \cos(\pi) \cdot 2\pi = 3\pi^4 - 2\pi.$$

PRZYKŁAD A'. Dla $g(x, y, z) = x^4 y^3 + xz$ mamy

$$g'_x(\pi, 1, e) = (\dots\dots)_{\substack{x=\pi \\ y=1 \\ z=e}} = \dots\dots, \quad g'_y(\pi, 1, e) = \dots\dots, \quad g'_z(\pi, 1, e) = \dots\dots$$

PRZYKŁAD B. Dla funkcji $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{x^2+y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

w punkcie $(0, 0)$ (obliczamy z definicji):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} = +\infty, \text{ więc } f'_x(0, 0) \text{ nie istnieje,}$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{0^2+h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

a w punktach $(x, y) \neq (0, 0)$ liczymy ze wzorów:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1 \cdot (x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{x^2+y^2} = x \cdot (-1)(x^2+y^2)^{-2} \cdot 2y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

PRZYKŁAD C. Funkcja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^4+y^4} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

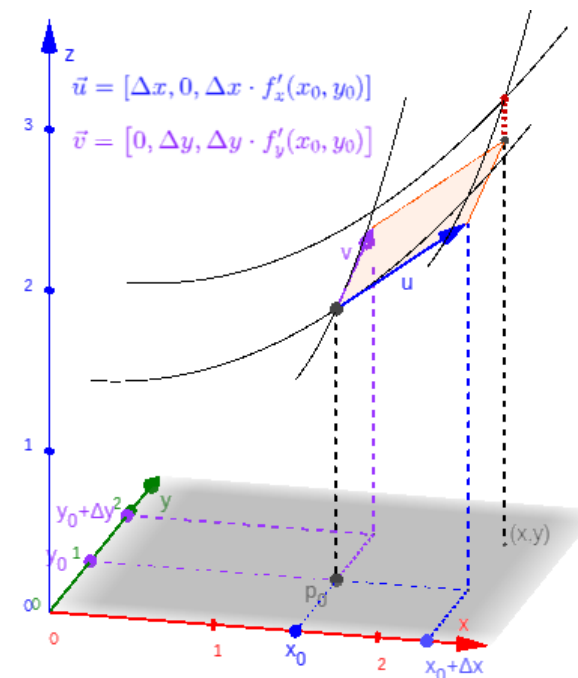
ma w każdym punkcie obie pochodne cząstkowe, bowiem:

- dla punktu $(0, 0)$: obie pochodne cząstkowe są równe 0, bo:

zauważamy, że f obcięte do osi OX jest funkcją stałą (=0); tak samo dla osi OY;

- w punktach $(x, y) \neq (0, 0)$ można obliczyć pochodne cząstkowe ze wzorów.

Uwaga: funkcja ta ma wszędzie obie pochodne cząstkowe ale nie jest ciągła (sprawdź).



PRZYKŁAD D. Niech $f(x, y) = \begin{cases} 2y & \text{gdy } (x, y) \in [0, 2]^2 \\ 2 & \text{gdy } (x, y) \notin [0, 2]^2 \end{cases}$

Niech $B = [0, 1]^2 \setminus (0, 1)^2$. Funkcja f ma wszędzie, poza B , obie pochodne cząstkowe.

Dalej rozważmy punkt $p \in B$, zbadamy f'_x :

- przypadek $p \in [0, 2] \times \{0\}$, czyli $p = (x_0, 0)$:
dla $x_0 \in (0, 2)$ oczywiście $f'_x(x_0, 0) = 0$, bo $f|_{(0,2) \times \{0\}}$ jest stała (równa ...),
dla $x_0 \in \{0, 2\}$ f'_x nie istnieje (zrób wykresy $f|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times \{0\}}$ i $f|_{(2-\varepsilon, 2+\varepsilon) \times \{0\}}$,
- przypadek $p \in [0, 2] \times \{2\}$, czyli $p = (x_0, 2)$ jest niemal identyczny z poprzednim (z jakimi zmianami?)
- przypadek $p \in \{0\} \times [0, 2]$, czyli $p = (0, y_0)$:
dla
dla
- przypadek $p \in \{2\} \times [0, 2]$, czyli $p = (..., y_0)$ jest niemal identyczny z poprzednim.

Zatem dziedziną f'_x jest zbiór $(\mathbb{R}^2 \setminus B) \cup ((0, 2) \times \{0, 2\}) \cup \{(..., ...), (... , ...)\}$.

Podobnie badając otrzymujemy: dziedziną f'_y jest zbiór
* * *

Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ma ciągle pochodne cząstkowe w pewnym otoczeniu p-ktu (x_0, y_0) .

Równanie $z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$

określa *płaszczyznę styczną* do f w punkcie (x_0, y_0) .

Zachodzi: $f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$

czyli wartości f są 'nieźle' przybliżane przez wartości bardzo prostej funkcji.

Dokładność tego przybliżenia będziemy omawiać w przyszłości (za Taylorem).

PRZYKŁAD. Funkcja $f(x, y) = x^3 + y^4$ ma w punkcie $(x_0, y_0) = (2, 1)$ płaszczyznę styczną o równaniu

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

$$z = 2^3 + 1^4 + (3 \cdot 2^2 + 0) \cdot (x - 2) + (0 + 4 \cdot 1^3) \cdot (y - 1),$$

$$z = 9 + 12(x - 2) + 4(y - 1),$$

$$z = 12x + 4y - 19.$$

PRZYKŁAD. Znaleźć płaszczyznę P , na której leżą punkty $(3, 0, 5)$, $(3, 1, 7)$, styczną do powierzchni $x^2 + y^2 + z = 4$.

Odp.: Są dwie takie płaszczyzny; mają równania $z = -12x + 2y + 41$, $z = 2y + 5$.