

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. NOTATKI Z WYKŁADU 5A

Pochodne cząstkowe $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ funkcji $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami z podzbiorów $\mathbb{R}^2$ w $\mathbb{R}$, zatem można je dalej różniczkować; każdą i po x , i po y .

Np. dla $f(x, y) = 3x^4y^2$ mamy:

$$f'_x(x, y) = 12x^3y^2, \quad f'_y(x, y) = 6x^4y$$

oraz

$$f''_{xx}(x, y) = 36x^2y^2, \quad f''_{yx}(x, y) = 24x^3y, \quad f''_{xy}(x, y) = 24x^3y, \quad f''_{yy}(x, y) = 6x^4$$

Można też liczyć pochodne cząstkowe rzędu trzeciego:

$$f'''_{xxx}(x, y) = 72xy^2, \quad f'''_{yxx}(x, y) = 72x^2y, \quad f'''_{xyx}(x, y) = \dots, \quad f'''_{\dots}(x, y) = \dots, \\ f'''_{\dots}(x, y) = 72xy^2, \dots \quad (\text{Ile ich jest?})$$

To nie przypadek, że wiele jest równych, bowiem

Tw. Gdy f jest klasy $\mathcal{C}^2$, czyli ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu drugiego, to pochodne mieszane są równe, czyli $f''_{yx}(x, y) = f''_{xy}(x, y)$.

W innej notacji:

Tw. (SCHWARZA) Dla $f \in \mathcal{C}^2$ mamy $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Z tego twierdzenia wynikają równości pochodnych mieszanych wyższych rzędów (przy założeniu ich ciągłości). W szczególności dla funkcji **dwóch** zmiennych:

dla f-cji $f \in \mathcal{C}^3$ mamy (co najwyżej) cztery różne pochodne cząstkowe rzędu trzeciego:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \dots \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x} = \dots \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3},$$

dla f-cji $f \in \mathcal{C}^4$ mamy (co najwyżej) pięć różnych pochodnych cząstkowych rzędu czwartego:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}, \\ \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} = \dots \\ \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = \dots \\ \dots \\ \dots$$

UWAGA. Istnieją funkcje, których pochodne mieszane nie są równe. Mianowicie:

$$\text{Wprost z definicji obliczmy } f''_{yx}(0,0) \text{ i } f''_{xy}(0,0) \text{ dla } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{gdy } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{gdy } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Potrzebne będą pochodne pierwszego rzędu:

oczywiście $f'_x(0,0) = \dots = f'_y(0,0)$ (bo);

poza $(0,0)$ obliczamy (ze wzorów): $f'_x(x,y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$, $f'_y(x,y) = \frac{x(\dots)}{(x^2 + y^2)^2}$.

Drugie pochodne mieszane w $(0,0)$ wyznaczamy wprost z definicji (licząc przyrosty wyznaczonych poprzednio pierwszych pochodnych):

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_x(0,0+h) - f'_x(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\dots - \dots}{h} = \dots,$$

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f' \dots (\dots, \dots) - f' \dots (\dots, \dots)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\dots - \dots}{s} = \dots.$$

Zatem

Podobnie jest dla funkcji trzech lub więcej zmiennych.

.....

.....

.....

.....