

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. NOTATKI Z WYKŁADU 5B

PRZYKŁAD. Niech $\Phi = \Phi(m, r) = G \frac{M \cdot m}{r^2}$.

Okazuje się jednak, że m, r nie są zmiennymi wolnymi, są funkcjami pewnej zmiennej t , czyli: $m = m(t)$ oraz $r = r(t)$.

Wtedy $F = F(t) = \Phi(m(t), r(t)) = G \frac{M \cdot m(t)}{(r(t))^2}$.

PROBLEM(İK). Jak wyznaczyć $F' = \frac{dF}{dt}$?

$$\begin{aligned} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} &= \frac{G \frac{M \cdot m(t+h)}{(r(t+h))^2} - G \frac{M \cdot m(t)}{(r(t))^2}}{h} = \\ &= \frac{G \frac{M \cdot m(t+h)}{(r(t+h))^2} - G \frac{M \cdot m(t)}{(r(t+h))^2}}{h} + \frac{G \frac{M \cdot m(t)}{(r(t+h))^2} - G \frac{M \cdot m(t)}{(r(t))^2}}{h} = \\ &= \frac{G \frac{M \cdot m(t+h)}{(r(t+h))^2} - G \frac{M \cdot m(t)}{(r(t+h))^2}}{m(t+h) - m(t)} \cdot \frac{m(t+h) - m(t)}{h} + \frac{G \frac{M \cdot m(t)}{(r(t+h))^2} - G \frac{M \cdot m(t)}{(r(t))^2}}{r(t+h) - r(t)} \cdot \frac{r(t+h) - r(t)}{h} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \Phi'_m \cdot m' + \Phi'_r \cdot r' \end{aligned}$$

Jest to przykład (najprostszej?) reguły łańcucha.

Inną wersję reguły łańcucha dostajemy w nieco ogólniejszej sytuacji:

Gdy $F = F(t, x, y) = \Phi(m(t, x, y), r(t, x, y))$, to F ma **trzy** pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial t}, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial x} + \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial y} + \dots$$

Gdyby M nie było stałą, np. $M = M(t, x, y)$, to $\Phi = \Phi(M, m, r)$.

Wtedy wygodnie jest myśleć, że funkcje m, r formalnie też zależą od x, y (nie tylko od t). Teraz złożenie zależy od trzech zmiennych:

$$F = F(t, x, y) = \Phi(M(t, x, y), m(t, x, y), r(t, x, y))$$

i mamy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial \Phi}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial t}, \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial \Phi}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y}. \end{aligned}$$

Tw. Niech $f(x, y, z)$, $x(s, t)$, $y(s, t)$, $z(s, t)$ będą klasy $\mathcal{C}^1$.

Wtedy dla $F(s, t) = f(x(s, t), y(s, t), z(s, t))$

mamy:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}.$$

D-D. (szkic dowodu pierwszego wzoru):

$$\begin{aligned} \frac{f(x(s+h, t), y(s+h, t), z(s+h, t)) - f(x(s, t), y(s, t), z(s, t))}{h} &= \{ \text{dalej trik: } +\cos ik - \cos ik \dots \} \\ &= \frac{f(x(s+h, t), y(s+h, t), z(s+h, t)) - f(x(s, t), y(s+h, t), z(s+h, t))}{x(s+h, t) - x(s, t)} \cdot \frac{x(s+h, t) - x(s, t)}{h} + \\ &\quad + \frac{f(x(s, t), y(s+h, t), z(s+h, t)) - f(x(s, t), y(s, t), z(s+h, t))}{y(s+h, t) - y(s, t)} \cdot \frac{y(s+h, t) - y(s, t)}{h} + \\ &\quad + \frac{f(x(s, t), y(s, t), z(s+h, t)) - f(x(s, t), y(s, t), z(s, t))}{z(s+h, t) - z(s, t)} \cdot \frac{z(s+h, t) - z(s, t)}{h} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} f'_x(x(s, t), y(s, t), z(s, t)) \cdot x'_s(s, t) + \\ &\quad + f'_y(x(s, t), y(s, t), z(s, t)) \cdot y'_s(s, t) + \\ &\quad + f'_z(x(s, t), y(s, t), z(s, t)) \cdot z'_s(s, t). \end{aligned}$$

Szczegóły uzupełniają: tw. Lagrange'a i założenia ciągłości. $\square$

PRZYKŁAD. Niech $f(x, y, z) = x + xy^2z^3$, $x(s, t) = s + t^2$, $y(s, t) = s^2 - t$, $z(s, t) = st$ i $F(s, t) = f(x(s, t), y(s, t), z(s, t))$. Można podstawić i żmudnie obliczać F'_s i F'_t , ALE powyższa reguła pozwala niemal automatycznie podać:

$$\begin{aligned} F'_s &= f'_x \cdot x'_s + f'_y \cdot y'_s + f'_z \cdot z'_s = (1 + y^2z^3) \cdot (1) + (2xy^2z^3) \cdot (2s) + (3xy^2z^2) \cdot (t) = \\ &\quad \text{i dalej wstawiamy za } x, y, z: \\ &= (1 + (s^2 - t)^2(st)^3) + 2(s + t^2)(s^2 - t)(st)^3 \cdot 2s + 3(s + t^2)(s^2 - t)^2(st)^2 \cdot t, \\ F'_t &= \dots \end{aligned}$$

PRZYKŁAD. Niech $z = ue^v + ve^{-u}$; $u = \ln r$, $v = s \cdot \ln r$. Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} = (e^v - ve^{-u}) \cdot \frac{1}{r} + (ue^v + e^{-u}) \cdot \frac{s}{r} = \dots \\ \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} = (e^v - ve^{-u}) \cdot 0 + (ue^v + e^{-u}) \cdot \ln r = \dots \end{aligned}$$

Tw. Niech $f(x_1, \dots, x_k)$ i $x_1(t_1, \dots, t_n), \dots, x_k(t_1, \dots, t_n)$ będą funkcjami klasy $\mathcal{C}^1$. Wtedy złożenie $F(t_1, \dots, t_n) = f(x_1(t_1, \dots, t_n), \dots, x_k(t_1, \dots, t_n))$ jest też klasy $\mathcal{C}^1$ o pochodnych cząstkowych:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial t_1}, \\ &\vdots \\ \frac{\partial F}{\partial t_n} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_n} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial t_n}. \end{aligned} \quad \square$$

Regułę łańcucha wygodniej jest zanotować rachunkiem macierzowym, co pomijamy.