

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. NOTATKI 5C

PRZYKŁAD A. Liczbę $A = \sqrt{4.01^2 + 3.02^2}$ można przybliżyć przez $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \approx A$.

Można też inaczej:

Niech $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Wartość $A = f(4.01, 3.02)$ można przybliżyć z równania płaszczyzny stycznej do f w punkcie $(4, 3)$, tzn.

Obliczamy $f'_x(4, 3) = \frac{2 \cdot x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}|_{(4,3)} = 0.8$, $f'_y(4, 3) = \frac{2 \cdot y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}|_{(4,3)} = 0.6$ i równanie

płaszczyzny stycznej: $z = 5 + 0.8 \cdot (x - 4) + 0.6 \cdot (y - 3).$

Dalej traktujemy prawą stronę jako wzór funkcji $z = z(x, y)$, skąd mamy:

$$A \approx z(4.01, 3.02) = 5 + 0.8 \cdot (4.01 - 4) + 0.6 \cdot (3.02 - 3) = 5.02.$$

Żadna z tych dwóch odpowiedzi nie jest satysfakcjonująca, bo NIC nie powiedzieliśmy jak duży błąd może skrywać się pod wężykiem ($\approx$). Wyniknie to z poniższego

Tw. (Taylor, rzędu 2) Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ będzie klasy $\mathcal{C}^2$ w obszarze zawierającym odcinek $(x_0, y_0)(x, y) \subseteq \mathbb{R}^2$. Wtedy istnieje punkt $(\hat{x}, \hat{y})$ tego odcinka taki, że

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + R_2,$$

gdzie $R_2 = \frac{1}{2} (f''_{xx}(\hat{x}, \hat{y}) \cdot (x-x_0)^2 + 2f''_{yx}(\hat{x}, \hat{y}) \cdot (x-x_0) \cdot (y-y_0) + f''_{yy}(\hat{x}, \hat{y}) \cdot (y-y_0)^2)$.

PRZYKŁAD A. c.d. Zauważmy:

$$f(4.01, 3.02) = f(4, 3) + f'_x(4, 3) \cdot (4.01 - 4) + f'_y(4, 3) \cdot (3.02 - 3) + R_2, \text{ czyli } A = 5.02 + R_2.$$

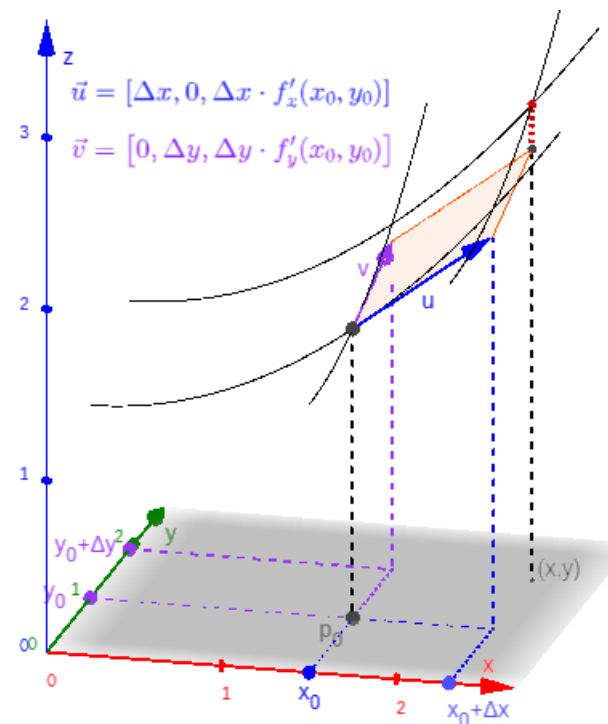
Zatem informacja o błędzie kryje się w R_2 , bo $|A - 5.02| = |R_2| = |\text{błąd}|$.

Obliczmy $f''_{xx} = \dots = \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$, $f''_{yy} = \dots = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$, $f''_{xy} = \dots = \frac{-xy}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$,

niestety nie wiemy dokładnie w jakim punkcie je liczyć; pozostaje szacowanie:

$$\begin{aligned} |\text{bład}| &= |R_2| = \frac{1}{2} \left| f''_{xx}(\hat{x}, \hat{y}) \cdot 0.01^2 + 2f''_{yx}(\hat{x}, \hat{y}) \cdot 0.01 \cdot 0.02 + f''_{yy}(\hat{x}, \hat{y}) \cdot 0.02^2 \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{y}^2}{\sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2}^3} \cdot 0.01^2 + 2 \frac{|\hat{x}\hat{y}|}{\sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2}^3} \cdot 0.01 \cdot 0.02 + \frac{\hat{x}^2}{\sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2}^3} \cdot 0.02^2 \right) \leq \overbrace{\hspace{1.5cm}}^{\text{nier. tr.}} \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{3.02^2}{5^3} \cdot 0.01^2 + 2 \frac{4.01 \cdot 3.02}{5^3} \cdot 0.01 \cdot 0.02 + \frac{4.01^2}{5^3} \cdot 0.02^2 \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{4^2}{5^3} \cdot \frac{1}{10^4} + 2 \frac{5 \cdot 4}{5^3} \cdot \frac{2}{10^4} + \frac{5^2}{5^3} \cdot \frac{4}{10^4} \right) = \frac{196}{2 \cdot 5^3 \cdot 10^4} = \frac{196 \cdot 4}{2^5 \cdot 5^3 \cdot 10^4} \leq \frac{800}{10^7} = \frac{8}{10^5} < \frac{1}{10^4}. \end{aligned}$$

Zatem owe przybliżenie płaszczyzn stycznych daje $A \approx 5.02$ z błędem mniejszym od 10^{-4} .



PYTANIA KONTROLNE.

- (i) Czym jest Δx (z rysunku) w sformułowaniu twierdzenia?
- (i) Jakiego koloru jest odcinek o długości R_2 ?

Tw. (Tylora, rzędu 3) Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ będzie klasy $\mathcal{C}^3$ w obszarze zawierającym odcinek $(x_0, y_0)(x, y) \subseteq \mathbb{R}^2$. Wtedy istnieje punkt $(\hat{x}, \hat{y})$ tego odcinka taki, że

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x \Delta x + f'_y \Delta y + \frac{1}{2} (f''_{xx} \Delta x^2 + 2f''_{yx} \Delta x \Delta y + f''_{yy} \Delta y^2) + R_3,$$

gdzie $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ i

$$R_3 = \frac{1}{3!} (f'''_{xxx} \Delta x^3 + 3f'''_{xyx} \Delta x^2 \Delta y + 3f'''_{xyy} \Delta x \Delta y^2 + f'''_{yyy} \Delta y^3),$$

gdzie pochodne cząstkowe rzędu trzeciego są liczone w $(\hat{x}, \hat{y})$, a pozostałe w (x_0, y_0) .

Dowód. (szkic)

Określamy funkcję JEDNEJ zmiennej $F(t) = f(x_0 + t \cdot \Delta x, y_0 + t \cdot \Delta y)$, dla $t \in [0, 1]$.

Z tw. Taylora dla funkcji jednej zmiennej wynika istnienie $\hat{t} \in (0, 1)$ takiego, że

$$F(1) = F(0) + F'(0) \cdot (1 - 0) + \frac{1}{2!} \cdot F''(0) \cdot (1 - 0)^2 + \frac{1}{3!} \cdot F'''(\hat{t}) \cdot (1 - 0)^3, \quad (*)$$

czyli

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2!} \cdot F''(0) + \frac{1}{3!} \cdot F'''(\hat{t}).$$

Dalej wystarczy wyznaczyć (z reguły) wartości pochodnych:

$$F'(t) = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y = f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y.$$

$$\begin{aligned} F''(t) &= \frac{\partial (f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y)}{\partial t} = \frac{\partial f'_x}{\partial t} \cdot \Delta x + \frac{\partial f'_y}{\partial t} \cdot \Delta y = \\ &= \left(\frac{\partial f'_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f'_x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) \cdot \Delta x + \left(\frac{\partial f'_y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f'_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) \cdot \Delta y = \\ &= (f''_{xx} \cdot \Delta x + f''_{yx} \cdot \Delta y) \cdot \Delta x + (f''_{xy} \cdot \Delta x + f''_{yy} \cdot \Delta y) \cdot \Delta y = \\ &= f''_{xx} \cdot (\Delta x)^2 + 2 \cdot f''_{yx} \cdot \Delta x \cdot \Delta y + f''_{yy} \cdot (\Delta y)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'''(t) &= \frac{\partial f''_{xx}}{\partial t} \cdot (\Delta x)^2 + 2 \frac{\partial f''_{yx}}{\partial t} \cdot \Delta x \cdot \Delta y + \frac{\partial f''_{yy}}{\partial t} \cdot (\Delta y)^2 = \\ &= \left(\frac{\partial f''_{xx}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f''_{xx}}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) (\Delta x)^2 + 2 \left(\frac{\partial f''_{yx}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f''_{yx}}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) \Delta x \Delta y + \left(\frac{\partial f''_{yy}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f''_{yy}}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) (\Delta y)^2 = \\ &= f'''_{xxx} \cdot (\Delta x)^3 + 3f'''_{xyx} \cdot \Delta x^2 \Delta y + 3f'''_{xyy} \cdot \Delta x \Delta y^2 + f'''_{yyy} \cdot (\Delta y)^3. \end{aligned}$$

Wstawiając powyższe do wzoru (*) i przyjmując $\hat{x} = x_0 + \Delta x$, $\hat{y} = y_0 + \Delta y$, mamy tezę. $\square$

Tw. (Taylor, rzędu n) Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ będzie klasy $\mathcal{C}^n$ w obszarze zawierającym odcinek $(x_0, y_0)(x, y) \subseteq \mathbb{R}^2$. Wtedy istnieje punkt $(\hat{x}, \hat{y})$ tego odcinka taki, że

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\partial^k f}{\partial y^i \partial x^{k-i}} \cdot (y - y_0)^i (x - x_0)^{k-i} \right),$$

gdzie pochodne cząstkowe rzędu n są liczone w $(\hat{x}, \hat{y})$, a pozostałe w (x_0, y_0) .

UWAGA. Prawa strona wzoru, pomijając składniki przy $k = n$, jest wielomianem zmiennych x i y ; nazwijmy go $w(x, y)$. Jest to wielomian stopnia $\dots$. Ma on wiele wspólnego z funkcją f w punkcie (x_0, y_0) . CO ma wspólne?

ODP. Wspólne są: wartość i wartości wszystkich pochodnych cząstkowych rzędu $\leq n - 1$ (w punkcie (x_0, y_0)).

UWAGA. Napis: $f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\partial^k f}{\partial y^i \partial x^{k-i}} \cdot (y - y_0)^i (x - x_0)^{k-i} \right)$ nazywamy szeregiem Taylora funkcji f w punkcie (x_0, y_0) . Oczywiście ma on sens jedynie dla funkcji, która ma pochodne cząstkowe wszystkich rzędów.

Podobnie jak dla funkcji jednej zmiennej, można pytać:

- Kiedy szereg Taylora jest zbieżny? (dla jakich punktów (x, y) ?)
- Jeśli jest zbieżny dla pewnego (x, y) , to czy jego suma jest równa $f(x, y)$?
- Jeśli jest zbieżny dla pewnego (x, y) , to 'jak szybko' jest zbieżny?

Pomijamy tu tą tematykę.

* * *

Tw. (wzór Taylora; ogólnie) Niech $p = (x_1, \dots, x_m)$, $\bar{p} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) \in D \subseteq \mathbb{R}^m$.

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ będzie klasy $\mathcal{C}^n$ w otoczeniu odcinka $p\bar{p} \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^m$.

Wtedy istnieje punkt $\hat{p} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m)$ tego odcinka taki, że

$$f(p) = f(\bar{p}) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k!} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} \cdot (x_{i_k} - \bar{x}_{i_k}) \cdot \dots \cdot (x_{i_1} - \bar{x}_{i_1}) \right),$$

gdzie pochodne cząstkowe rzędu n (najwyższe) są liczone w $\hat{p} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m)$, a pozostałe w $\bar{p} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)$.

PYTANIA KONTROLNE. Porównaj ogólne sformułowanie z poprzednimi:

- (i) Co tu jest odpowiednikiem punktu (x_0, y_0) ? A punktu (x, y) ? A punktu $(\hat{x}, \hat{y})$?
- (ii) Gdzie tu jest 'schowana' tzw. reszta R_n ?
- (iii) Dlaczego tu nie ma nigdzie symbolu Newtona?