

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. NOTATKI Z WYKŁADU 7

WARTOŚĆ NAJWIĘKSZA (WARTOŚĆ NAJMNIEJSZA) FUNKCJI

Dla niektórych f-cji $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ istnieje $p_g \in D$ takie, że $f(p) \leq f(p_g)$, dla każdego $p \in D$.

Mówimy wtedy, że $f(p_g)$ jest wartością największą f , że f osiąga swój kres górny.

Analogicznie, f osiąga wartość najmniejszą w punkcie p_d , gdy ('znaczkami'):

$$\forall_{p \in D} f(p_d) \leq f(p).$$

To samo innymi 'znaczkami':

$$f(p_d) = \inf f[D] = \inf \{f(p) : p \in D\} = \inf_{p \in D} f(p) = \inf_D f = \inf f.$$

UWAGA. Nie dla każdej funkcji istnieje wartość największa, ale kres górny wartości istnieje zawsze (może być równy $+\infty$), jak zobaczymy w poniższych przykładach:

- Dla $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, której dziedziną jest $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ mamy:

$$\inf_D f = 0 \text{ i } f \text{ nie ma wartości najmniejszej, bo } 0 < f(x, y) \text{ i } f(n, 0) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

$$\sup_D f = +\infty \text{ (bo } f(\frac{1}{n}, 0) = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty) \text{ i oczywiście } f \text{ nie ma wartości największej.}$$

- Dziedziną funkcji $f(x, y) = 2\sqrt{1-x^2-y^2}$ jest koło $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Oczywiście $f(x, y) \leq 2\sqrt{1-0^2-0^2} = 2^1 = f(0, 0)$, zatem 2 jest wartością największą. Kres górny: $\sup f = 2$ i jest on przyjęty tylko w punkcie $(0, 0)$. Kres dolny: $\inf f = 2^0 = 1$ jest osiąganym w każdym punkcie brzegu K (na okręgu).

- Dla $f(x, y) = xy$ na $(0, 1]^2$ oczywiście mamy: $0 < f(x, y) = xy \leq 1 \cdot 1 = f(1, 1)$, zatem $\sup_{(0, 1]^2} f = 1$ i jest on przyjęty tylko w punkcie $(1, 1)$. Natomiast $\inf_{(0, 1]^2} f = 0$ (bo $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$) nie jest osiągnięty w żadnym punkcie $(0, 1]^2$.

- Dla $f(x, y) = \arctan(1 + x^2 + y^2)$ mamy: $\inf_{\mathbb{R}^2} f = \frac{\pi}{4} = f(0, 0)$ oraz $\sup_{\mathbb{R}^2} f = \frac{\pi}{2}$ (bo $f(n, 0) = \arctan(1 + n^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}$) i nie jest osiągnięty w żadnym punkcie $\mathbb{R}^2$.

TWIERDZENIE WEIERSTRASSA. (o osiąganiu [przyjmowaniu] kresów)

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągła na zbiorze domkniętym i ograniczonym $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Wtedy istnieją punkty $p_d, p_g \in D$ takie, że $f(p_d) \leq f(p) \leq f(p_g)$ dla każdego $p \in D$.

DOWÓD. Ograniczmy się do szukania takiego punktu p_g , że $f(p_g) = \sup f[D]$.

Oznaczmy $s := \sup f[D]$. Dla wygody przyjmijmy, że $D \subseteq \mathbb{R}_+^2$.

Popatrzmy na kwadraty jednostkowe o wierzchołkach w punktach kratowych $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Wśród nich jest taki kwadrat K_0 , że $\sup f[K_0 \cap D] = s$ (istnieje taki, bo).

Niech $p_0 = (k_0, \ell_0)$ oznacza lewy dolny wierzchołek K_0 , dla pewnych $k_0, \ell_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Popatrzmy na 100 mniejszych kwadratów wypełniających kwadrat K_0 .

Wśród nich jest taki kwadrat K_1 , że $\sup f[K_1 \cap D] = s$ (istnieje taki, bo).

Niech $p_1 = (k_1, \ell_1)$ oznacza lewy dolny wierzchołek K_1 , dla pewnych cyfr k_1, ℓ_1 .

Popatrzmy na 100 mniejszych kwadratów wypełniających kwadrat K_1 .

Wśród nich jest taki kwadrat K_2 , że $\sup f[K_2 \cap D] = s$ (istnieje taki, bo).

Niech $p_2 = (k_2, \ell_2)$ oznacza lewy dolny wierzchołek K_2 (k_2, ℓ_2 to cyfry).

Popatrzmy na 100 mniejszych kwadratów wypełniających kwadrat K_2 .

Wśród nich jest taki kwadrat K_3 , że $\sup f[K_3 \cap D] = s$ (istnieje taki, bo).

Niech $p_3 = (k_3, \ell_3)$ oznacza lewy dolny wierzchołek K_3 (k_3, ℓ_3 to cyfry).

... I tak dalej ...

Dostajemy nieskończony ciąg kwadratów $K_0 \supseteq K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$.

Ciąg (p_n) ich lewych dolnych wierzchołków jest zbieżny do punktu

$$\hat{p} = (k_0, k_1 k_2 k_3 \dots, \ell_0, \ell_1 \ell_2 \ell_3 \dots).$$

Ponieważ $\text{diam} K_n = \frac{\sqrt{2}}{10^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, więc $\{\hat{p}\} = K_0 \cap K_1 \cap K_2 \cap \dots$.

Zauważmy, że $\hat{p} \in D$. Weźmy bowiem po punkcie $p'_n \in D \cap K_n$. Dostajemy ciąg (p'_n) z D , zbieżny do Ponieważ D jest , więc $\hat{p} \in D$.

Ciągłość f w $\hat{p}$ oznacza, że dla każdego $i \in \mathbb{N}$ istnieje $\delta_i > 0$ takie, że $|f(p) - f(\hat{p})| < \frac{1}{i}$,

o ile $\|p - \hat{p}\| < \delta_i$. Biorąc n_i takie, że $\frac{\sqrt{2}}{10^{n_i}} < \delta_i$, mamy:

$$|f(p) - f(\hat{p})| < \frac{1}{i}, \text{ dla wszystkich } p \in K_{n_i} \cap D.$$

Stąd $|\sup_{K_{n_i} \cap D} f(p) - f(\hat{p})| \leq \frac{1}{i}$, czyli $|s - f(\hat{p})| \leq \frac{1}{i}$.

Ponieważ $\frac{1}{i}$ może być dowolnie małe, więc $|s - f(\hat{p})| = 0$, czyli $f(\hat{p}) = s = \sup f[D]$.

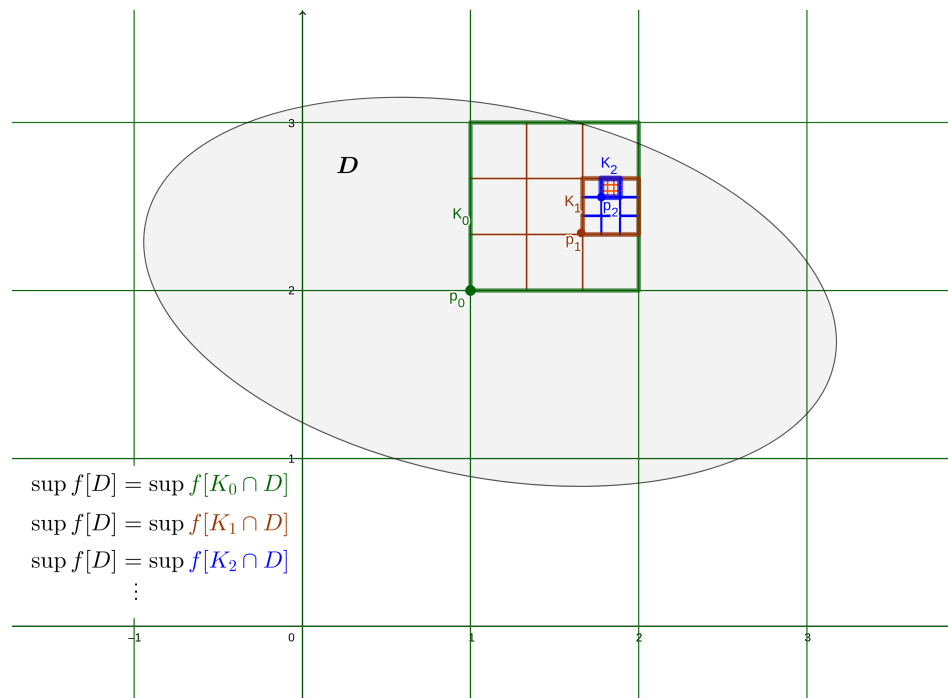
Zatem można przyjąć $p_g := \hat{p}$. $\square$

UWAGA. Dowód należy uzupełnić poniższymi zdaniami. W których miejscach?

(*) $\sup f[B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_m] = \max\{\sup f[B_1], \sup f[B_2], \dots, \sup f[B_m]\}$,

(**) ograniczoność D zapewnia, że D jest zawarte w skończonej sumie kwadratów.

Na poniższej ilustracji mamy podziały nie na 100, a na 9 mniejszych kwadratów.



Szukając wartości najmniejszej i największej funkcji $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, twierdzenie Weierstrassa daje nam informację, że 'JEST CZEGO SZUKAĆ', o ile f jest ciągła i określona na zbiorze domkniętym i ograniczonym $D \subseteq \mathbb{R}^n$, czyli na zbiorze zwartym.

W przypadku $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ klasy $\mathcal{C}^1$ we wnętrzu D i gdy $D \subseteq \mathbb{R}^2$ jest zwarte możemy postępować następująco:

Szukamy punkty krytyczne, tzn. takie, w których f może osiągać swe kresy:

- 1° szukamy punkty krytyczne we wnętrzu D , czyli spełniające układ $\begin{cases} f'_x(p)=0 \\ f'_y(p)=0 \end{cases}$,
- 2° szukamy punkty krytyczne na brzegu D (co zazwyczaj sprowadzamy do badania pomocniczych funkcji jednej zmiennej),
- 3° tw. Weierstrassa gwarantuje, że wartość najmniejszą i wartość największą znajdziemy wśród wartości f w otrzymanych poprzednio punktach krytycznych. To zazwyczaj sprowadza się do porównania wartości funkcji w skończenie wielu punktach.

UWAGA. Punkty D , w których f nie ma pochodnych cząstkowych należy zaliczyć do punktów krytycznych.

PRZYKŁAD. Niech $D \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie ograniczony przez linie: $x^2 + y = 1$, $x - y = 1$. Dla $f(x, y) = xy$ znaleźć $\sup_D f$, $\inf_D f$ i wszystkie punkty, w których są przyjmowane.

1°. Szukam p. kryt. we wnętrzu D (tu rys.!!!)

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}, \text{ zatem } p_0 = (0, 0) \text{ jest jedynym p. krytycznym we wnętrzu } D.$$

2°. Szukam p. kryt. na brzegu D :

2°a) Szukam p. kryt. na odcinku $(-2, -3)(1, 0)$:

Pomocnicza funkcja $a : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $a(s) = f(s, s-1) = s(s-1)$ jest fragmentem paraboli o wierzchołku w $s = \frac{1}{2}$. Poza wierzchołkiem a maleje/rośnie, zatem f na tym odcinku ma punkty krytyczne: $p_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ i końce: $p_2 = (-2, -3)$, $p_3 = (1, 0)$.

2°b) Szukam p. kryt. na fragmencie paraboli $y = 1 - x^2$, $x \in [-2, 1]$:

Pomocnicza funkcja $b : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $b(t) = f(t, 1-t^2) = t(1-t^2)$ ma pochodną $b'(t) = -3t^2 + 1$, która zeruje się dla $t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Zatem f ma tu punkty krytyczne: $p_4 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3})$, $p_5 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3})$ i końce (które już uwzględniliśmy w 2°a)).

3°. D jest ograniczony (p.rys.) i (oczywiście) jest domknięty, więc (z tw. W.) f osiąga kresy na D , które znajdziemy porównując wartości jedynie w owych p. kryt.:

$$f(0, 0) = 0, f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}, f(-2, -3) = 6, f(1, 0) = 0, f(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}, f(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} < -\frac{2}{3\sqrt{4}} = -\frac{1}{3} < -\frac{1}{4} = f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}).$$

(Pozostałe zależności pomiędzy wartościami $f(p_k)$ są oczywiste.) Stąd ostatecznie:

$$\text{ODP.: } \sup_D f = 6 = f(-2, -3) \text{ oraz } \inf_D f = -\frac{2}{3\sqrt{3}} = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3}).$$

PRZYKŁAD. Niech $D = [-1, 1]^2$ i $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2xy + 1$.
(Łatwiej zrobić 'chyttrze' niż owym algorytmem — pomijam.)

PRZYKŁAD. (może nieco zbyt żmudny?)

Dla $f(x, y) = 2x^2y - x^3 - y^2$ na trójkącie $T = \Delta(0, 0)(1, 0)(0, 1)$ mamy:

1°. Szukam p. kryt. we wnętrzu T :

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4xy - 3x^2 = 0 \\ 2x^2 - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(4y - 3x) = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} y = \frac{3}{4}x \\ y = x^2 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{9}{16} \end{cases} \right).$$

We wnętrzu T nie leży żaden z tych punktów.

2°. Szukam p. kryt. na brzegu T :

2° a) Szukam p. kryt. na odcinku $(0, 1)(1, 0)$:

Pomocnicza funkcja $a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $a(x) = f(x, 1-x) = 2x^2(1-x) - x^3 - (1-x)^2 = -3x^3 + x^2 + 2x - 1$ ma pochodną $a'(x) = -9x^2 + 2x + 2$, która na $[0, 1]$ zeruje się tylko w $\frac{1+\sqrt{19}}{9}$, stąd dostajemy trzy punkty krytyczne: $p_1 = \left(\frac{1+\sqrt{19}}{9}, 1 - \frac{1+\sqrt{19}}{9}\right)$ i końce $p_2 = (0, 1)$, $p_3 = (1, 0)$.

2° b) Szukam p. kryt. na odcinku $(0, 0)(1, 0)$:

F-cja $b : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $b(x) = f(x, 0) = -x^3$ maleje na $[0, 1]$, stąd dostajemy tylko końce; $p_4 = (0, 0)$ (drugi już jest).

2° c) Szukam p. kryt. na odcinku $(0, 0)(0, 1)$:

Funkcja $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $c(y) = f(0, y) = -y^2$ maleje na $[0, 1]$, stąd dostajemy tylko końce (już są).

3°. Oczywiście T jest domknięty i ograniczony, więc (z tw. W.) f osiąga kresy na T , które znajdziemy badając wartości f w owych p. krytycznych:

$$f\left(\frac{1+\sqrt{19}}{9}, \frac{8-\sqrt{19}}{9}\right) = \frac{38\sqrt{19}-187}{243}, \quad f(1, 0) = -1 = f(0, 1), \quad f(0, 0) = 0.$$

To nie koniec strasznych rachunków, trzeba ów koszmarek porównać z -1 i z 0:

Ponieważ $\frac{38\sqrt{19}-187}{243} > \frac{0-187}{243} > -1$ oraz $\frac{38\sqrt{19}-187}{243} < \frac{38 \cdot 4,5 - 187}{243} = \frac{-16}{243} < 0$,
więc ostatecznie:

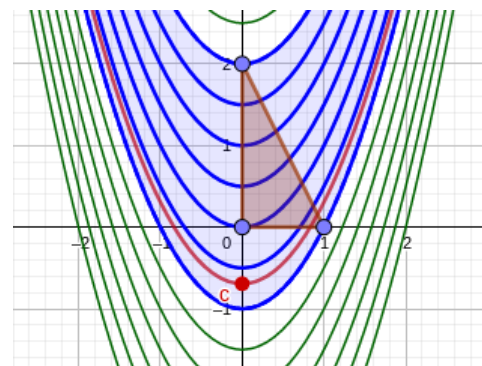
$$\text{ODPOWIEDŹ: } \sup_T f = 0 = f(0, 0) \text{ oraz } \inf_T f = -1 = f(1, 0) = f(0, 1).$$

PRZYKŁAD. Znajdź kres górny i kres dolny wartości funkcji $f(x, y) = 2x^2y - x^4 - y^2$ na zbiorze $T = \Delta(0, 0)(1, 0)(0, 2)$ i wszystkie punkty, w których te kresy są osiągane.

Jest to znacznie trudniejszy przykład. Stosowanie powyższej procedury jest możliwe, ale żmudne. Można 'chyttrze'.

Wsk. Zbadaj poziomice.

$$\text{ODPOWIEDŹ: } \inf_T f = -4 = f(0, 2) \text{ oraz } \sup_T f = 0 = f(x, x^2), \text{ dla } 0 \leq x \leq \sqrt{3} - 1.$$



Dla $f(x, y) = 2x^2y - x^4 - y^2$

znaleźć $\sup f[T]$, $\inf f[T]$,

gdzie $T = \Delta(0, 0)(1, 0)(0, 2)$.

Wsk. gdy $y = x^2 + c$, to $f(x, y) = ?$