

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. NOTATKI Z WYKŁADU 8A

• Zdanie

'Funkcja $f(x, y) = 3x + 2y^2$ przy warunku $x^2 + y^2 = 1$ osiąga wartość najmniejszą równą -3 .'

oznacza, że $\inf_K f = -3$, gdzie $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$;

innymi słowy: obcięcie $f|_K$, ma kres dolny wartości równy -3 .

Można to uzasadnić bez użycia AM 3; wystarczy z warunku wyznaczyć y^2 i zbadać pomocniczą funkcję $p(x) = 3x + 2(1 - x^2)$ **na przedziale** $[-1, 1]$ (dlaczego?).
(Można też 'chyttrze', czego tu nie omawiamy.)

W terminologii znanej i poza matematyką powyższe zadanie wygląda tak:

ZAD.A.

Zminimalizować $f(x, y) = 3x + 2y^2$ przy warunku $g(x, y) = 0$, gdzie $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

TWIERDZENIE. (wersja metody mnożników nieoznaczonych Lagrange'a)

Niech f-cje $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ będą klasy C^1 w otoczeniu punktu $p_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^m$.

Niech $g(p_0) = 0$ oraz $f|_{g=0}$ ma w p_0 ekstremum (lokalne lub globalne).

Wtedy wektory $\nabla f(p_0), \nabla g(p_0)$ są liniowo zależne.

W szczególności gdy $\nabla g(p_0) \neq \vec{0}$, to istnieje $\lambda \in \mathbb{R}$ taka, że $\nabla f(p_0) = \lambda \cdot \nabla g(p_0)$.

WNIOSEK. ($m = 3$) Niech $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mają wszędzie ciągłe gradienty i niech $\nabla g(x, y, z) \neq \vec{0}$ we wszystkich punktach zbioru $W = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = 0\}$.

Wtedy $f|_W$ może mieć ekstrema tylko w punktach (x, y, z) spełniających układ równań:

$$\begin{cases} f'_x(x, y, z) = \lambda \cdot g'_x(x, y, z) \\ f'_y(x, y, z) = \lambda \cdot g'_y(x, y, z) \\ f'_z(x, y, z) = \lambda \cdot g'_z(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}.$$

ZAD.A. ROZWIĄZANIE

Oczywiście okrąg jest zbiorem domkniętym i ograniczonym, więc z tw. W. wynika, że kresy są osiągalne. $\nabla g(x, y) = [2x, 2y] \neq \vec{0}$ w punktach tego okręgu, zatem wystarczy z tw. Lagrange'a badać punkty spełniające układ

$$\begin{cases} f'_x = \lambda \cdot g'_x \\ f'_y = \lambda \cdot g'_y \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = \lambda \cdot 2x \\ 4y = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dots \\ y = 0 \text{ lub } \lambda = 2 \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \pm \frac{\sqrt{7}}{4} \end{cases} \right).$$

Zatem $f(1, 0) = 3$, $f(-1, 0) = -3 = \inf f|_{g=0}$, $f(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}) = f(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{7}}{4}) = \frac{25}{8} = \sup f|_{g=0}$.

UWAGA. Tu 'strategia' rozwiązywania układu równań jest następująca:

- 'jak najszybciej pozbywamy się owej zmiennej λ ',
- nie dbamy o równoważności, potrzebne nam są implikacje $\Rightarrow$ (w szczególności nie interesuje nas owa λ),
- twierdzenie nie przesądza, czy w znalezionym rozwiązaniu jest ekstremum, potrzeba to jakoś inaczej rozstrzygnąć (np. przy szukaniu globalnego ekstremum, gdy tw.W. zapewni istnienie, to porównamy wartości f-cji w p. krytycznych).

ZAD.B. Znaleźć kresy $f(x, y, z) = x + z$ przy warunku $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Oznaczmy: $g(x, y, z) = \dots\dots\dots$

Oczywiście $\dots\dots\dots$ jest zbiorem domkniętym i ograniczonym, więc z tw. W. wynika, że kresy są osiągalne; wystarczy więc z tw. Lagrange'a badać punkty spełniające układ

$$\begin{cases} f'_x = \lambda \cdot g'_x \\ f'_y = \lambda \cdot g'_y \\ f'_z = \lambda \cdot g'_z \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda \cdot \dots \\ 0 = \lambda \cdot 2y \\ 1 = \lambda \cdot 2z \\ \dots\dots\dots \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} \dots\dots\dots \\ \lambda = 0 \\ \dots\dots\dots \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} \dots\dots\dots \\ y = 0 \\ \dots\dots\dots \end{cases} \right) \Rightarrow \dots$$

Zatem $\dots\dots\dots$

ZAD.C. Znajdź dodatnie liczby x, y, z , o sumie 24, których iloczyn jest największy.

ROZWIĄZANIE. Ponieważ $W = \{(x, y, z) : x + y + z = 24, x, y, z > 0\}$ NIE JEST domknięty (trójkąt bez boków), więc jest dramat = nie wiemy, czy funkcja $f(x, y, z) = xyz$ osiąga kres górny na W !

Pomysł: zbadam $\hat{f}(x, y, z) = xyz$ na zbiorze $T = \{(x, y, z) : x + y + z = 24, x, y, z \geq 0\}$.

Funkcja $\hat{f}$ na T osiąga swe kresy (bo T jest zwarty; więc można użyć tw. W $\dots\dots$).

Ponieważ

dla $(x, y, z) \in T \setminus W$ mamy $\hat{f}(x, y, z) = 0$

oraz

dla $(x, y, z) \in W$ mamy $\hat{f}(x, y, z) = f(x, y, z) > 0$

więc

$\sup_T \hat{f} = \sup_W f$ i są przyjęte w tych samych punktach.

Zatem dalej wystarczy znaleźć i zbadać punkty krytyczne $\hat{f}$ w zbiorze W :

$$\begin{cases} yz = \lambda \cdot 1 \\ xz = \lambda \cdot 1 \\ xy = \lambda \cdot 1 \\ x + y + z - 24 = 0 \end{cases} \xRightarrow{x, y, z > 0} \begin{cases} yz = xz \\ xz = xy \\ x + y + z = 24 \end{cases} \xRightarrow{x, y, z > 0} \dots\dots\dots$$

$\dots\dots\dots$

Podobny (do Zad. C) kłopot z brakiem zwartości mamy w poniższym zadaniu:

ZAD.D. Który z punktów linii L o równaniu $x^3 + y^3 = 8$ leży najbliżej punktu $(0, 0)$?

IDEA ROZWIĄZANIA.

Zamiast badać funkcję $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ na zbiorze L , wystarczy zbadać funkcję $\hat{f}(x, y) = x^2 + y^2$ na zbiorze $L \cap \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 3^2\}$ (na przykład).

ZAD.E. Znaleźć kresy $f(x, y) = xy$ przy warunku $x^4 + y^4 + x^2y^2 \leq 1$.

ROZWIĄZANIE. Oznaczmy: $g(x, y) = x^4 + y^4 + x^2y^2 - 1$, $U = \{(x, y) : g(x, y) \leq 0\}$.

Zauważmy, że $U \subseteq [-1, 1]^2$, bowiem

Zatem U jest zbiorem ograniczonym.

Jest też zbiorem domkniętym, więc z tw. W. wynika, że kresy są osiągalne.

Dalej, poszukiwanie p. kryt. należy podzielić na DWA przypadki:

A) Szukam p. kryt. w zbiorze $W = \{(x, y) : g(x, y) < 0\}$ (wnętrze U):

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dots\dots = 0 \\ \dots\dots = 0 \end{cases}, \quad \text{stad } p_0 = (0, 0).$$

B) Szukam p. kryt. w zbiorze $U \setminus W = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$ metodą Lagrange'a (zauważ, że gdy $\nabla g(x, y) = \vec{0}$ to $(x, y) = (0, 0) \notin U \setminus W$):

$$\begin{cases} y = \lambda(4x^3 + 2xy^2) \\ x = \lambda(4y^3 + 2x^2y) \\ x^4 + y^4 + x^2y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \lambda x(4x^2 + 2y^2) \\ x = \lambda y(4y^2 + 2x^2) \\ x^4 + y^4 + x^2y^2 = 1 \end{cases}$$

Z pierwszych dwóch równań wynika:

- (i) jeśli $x = 0$, to $y = 0$ (i $y = 0$),
- (ii) jeśli $y = 0$, to $x = 0$ (i $x = 0$),
- (iii) jeśli $\lambda = 0$, to $x = 0$ i $y = 0$,
- (iv) jeśli $4x^2 + 2y^2 = 0$, to $x = 0$ i $y = 0$,
- (v) jeśli $4y^2 + 2x^2 = 0$, to $x = 0$ i $y = 0$,

ale $(0, 0)$ nie spełnia trzeciego równania. Dalej więc możemy założyć, że wszystkie te wyrażenia są różne od 0.

Zatem możemy podzielić stronami pierwsze dwa równania. Po przekształceniach dostajemy $x^4 = \dots\dots$. Uwzględniając to w trzecim równaniu dostajemy 4 punkty:

$$p_1 = (1/\sqrt[4]{3}, \dots\dots), p_2 = (\dots\dots, \dots\dots), p_3 = (\dots\dots, \dots\dots), p_4 = (\dots\dots, \dots\dots).$$

C) Porównując wartości f w tych pięciu punktach krytycznych dostajemy odpowiedź

$$\begin{aligned} \sup f[U] &= 1/\sqrt{3} = f(\dots\dots, \dots\dots) = f(\dots\dots, \dots\dots), \\ \inf f[U] &= \dots\dots = f(\dots\dots, \dots\dots) = f(\dots\dots, \dots\dots). \end{aligned}$$