

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. NOTATKI Z WYKŁADU 8B

Nie można zapomnieć, że w metodzie Lagrange'a są pewne założenia, w szczególności trzeba uważać na brak różniczkowalności (np. gdy jest wartość bezwzględna):

PRZYKŁAD. A

Znajdź kresy $f(x, y) = |x^2 + y^2 - 2y| - 6y$ na zbiorze $W = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 9 \leq 0\}$.

ROZWIĄZANIE. (najważniejszy jest tu plan)

Oczywiście f jest ciągła i W jest kołem, więc (z tw. W.) kresy $f|_W$ są przyjmowane.

Zauważmy, że $x^2 + y^2 - 2y = 0 \iff x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1 \iff x^2 + (y - 1)^2 = 1$ jest równaniem okręgu S zawartego we wnętrzu W (patrz rys.).

Dalej szukamy p. kryt. w CZTERECH zbiorach:

- a) w zbiorze $U := \{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 < 1\}$ (wnętrze koła),
tu $f|_U(x, y) = -(x^2 + y^2 - 2y) - 6y$:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x = 0 \\ -2y - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \text{ brak p. kryt., bo } (0, -2) \notin U$$

- b) w zbiorze $S := \{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 = 1\}$ (okrąg),
 $f|_S(x, y) = (0) - 6y =: \bar{f}(x, y)$ i stosujemy metodę Lagrange'a ($\nabla \bar{f} \neq \vec{0}$ na S):

$$\begin{cases} \bar{f}'_x = \lambda \cdot 2x \\ \bar{f}'_y = \lambda \cdot 2(y - 1) \\ x^2 + (y - 1)^2 - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = \lambda \cdot 2x \\ -6 = \lambda \cdot 2(y - 1) \\ x^2 + (y - 1)^2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \dots\dots\dots \\ y = \dots\dots\dots \end{cases},$$

i dostajemy: $p_1 = (\dots, \dots)$, $p_2 = (\dots, \dots)$.

- c) w zbiorze $V := \{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 > 1, x^2 + y^2 < 9\}$ (wnętrze 'pierścienia'),
tu $f|_V(x, y) = (x^2 + y^2 - 2y) - 6y$:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y - 8 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = \dots \end{cases} \text{ brak p. kryt., bo } (0, \dots) \notin V$$

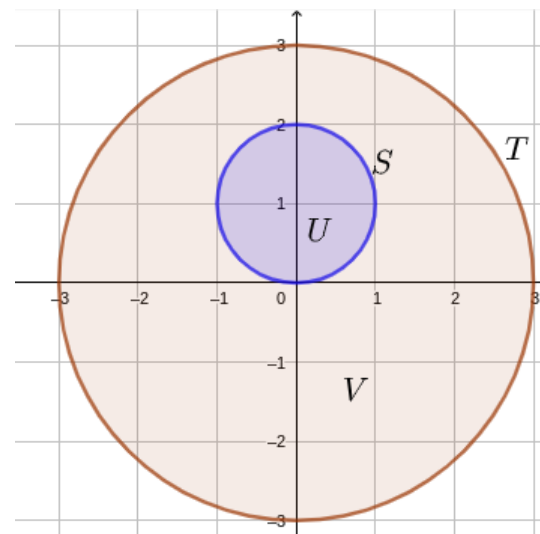
- d) w zbiorze $T := \{(x, y) : x^2 + y^2 = 9\}$ (okrąg),
tu $f|_T(x, y) = (x^2 + y^2 - 2y) - 6y = (9 - 2y) - 6y =: \hat{f}(x, y)$ i stosujemy met. L.:

$$\begin{cases} \hat{f}'_x = \lambda \cdot 2x \\ \hat{f}'_y = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = \lambda \cdot 2x \\ -8 = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \dots\dots\dots \\ y = \dots\dots\dots \end{cases},$$

i dostajemy: $p_3 = (\dots, \dots)$, $p_4 = (\dots, \dots)$.

Podsumowując: $f(p_1) = \dots$, $f(p_2) = \dots$, $f(p_3) = \dots$, $f(p_4) = \dots$,
stad $\sup f[W] = \dots = f(\dots\dots\dots)$, $\inf f[W] = \dots = f(\dots\dots\dots)$.

UWAGA. W b) i d) można 'chyttrze' (bez mnożników Lagrange'a).



TWIERDZENIE. (metoda mnożników Lagrange'a)

Niech funkcje $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$ będą klasy $\mathcal{C}^1$ w otoczeniu $p_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^m$,
niech $g(p_0) = 0$, $h(p_0) = 0$ oraz $f|_{g=0 \wedge h=0}$ ma w p_0 ekstremum lokalne lub globalne.
Wtedy wektory $\nabla f(p_0)$, $\nabla g(p_0)$, $\nabla h(p_0)$ są liniowo zależne.

W szczególności gdy $\nabla g(p_0), \nabla h(p_0)$ są liniowo niezależne, to istnieją $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ takie,
że

$$\nabla f(p_0) = \lambda \cdot \nabla g(p_0) + \mu \cdot \nabla h(p_0).$$

WNIOSEK. Niech $f, g, h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ są klasy $\mathcal{C}^1$ i gradienty $\nabla g, \nabla h$ są liniowo niezależne. Wtedy $f|_{g=0 \wedge h=0}$ może mieć ekstrema tylko w punktach (x, y, z) spełniających układ:

$$\begin{cases} f'_x(x, y, z) = \lambda \cdot g'_x(x, y, z) + \mu \cdot h'_x(x, y, z) \\ f'_y(x, y, z) = \lambda \cdot g'_y(x, y, z) + \mu \cdot h'_y(x, y, z) \\ f'_z(x, y, z) = \lambda \cdot g'_z(x, y, z) + \mu \cdot h'_z(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

ZAD.B. Znaleźć kresy $f(x, y, z) = y + z$ przy warunkach $x^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 4$.

Niech $g(x, y, z) = x^2 + z^2 - 1$, $h(x, y, z) = y^2 + z^2 - 4$ i $W = \{p : g(p) = 0 \text{ i } h(p) = 0\}$.

Jeśli $g(x, y, z) = 0$, to $|x| \leq 1$ i $|z| \leq 1$. Jeśli $h(x, y, z) = 0$, to $|y| \leq 2$ i $|z| \leq 2$.

Zatem punkty spełniające OBA warunki leżą w $[-1, 1] \times [-2, 2] \times [-1, 1]$, czyli W jest zbiorem ograniczonym. Jest też domknięty, więc z tw. W. wynika, że $f|_W$ osiąga swe kresy.

Zauważmy, że gradienty $\nabla g = [2x, 0, 2z]$, $\nabla h = [0, 2y, 2z]$ są liniowo niezależne w punktach z W (gdyby były zależne, to $x = 0 = y$, skąd $z^2 = 1 \neq 4 = z^2$).

Zatem wystarczy z tw. Lagrange'a badać punkty spełniające układ

$$\begin{cases} f'_x = \lambda \cdot g'_x + \mu \cdot h'_x \\ f'_y = \lambda \cdot g'_y + \mu \cdot h'_y \\ f'_z = \lambda \cdot g'_z + \mu \cdot h'_z \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \lambda \cdot 2x + \mu \cdot 0 \\ 1 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 2y \\ 1 = \lambda \cdot 2z + \mu \cdot 2z \\ x^2 + z^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{cases} x = 0 \\ 0^2 + z^2 = 1 \\ y^2 + 1 = 4 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} \lambda = 0 \\ 1 = \mu \cdot 2y \\ 1 = \mu \cdot 2z \\ x^2 + z^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \right)$$

Dalej: w ostatnim układzie ($\lambda = 0$) $\mu \neq 0$ (dlaczego?), skąd $y = z$. Stąd z ostatniego równania $y^2 = z^2 = 2$, co prowadzi do sprzeczności w przedostatnim: $x^2 + 2 = 1$.

Zatem punkty krytyczne dostajemy tylko z pierwszego układu ($x = 0$):

$$p_1 = (0, \sqrt{3}, 1), p_2 = (0, -\sqrt{3}, 1), p_3 = (0, \sqrt{3}, -1), p_4 = (0, -\sqrt{3}, -1).$$

Badając sumy $y + z$ dostajemy

$$\text{ODPOWIEDŹ: } \sup_W f = \sqrt{3} + 1 = f(p_1), \inf_W f = -\sqrt{3} - 1 = f(p_4).$$

ZAD.G. Znaleźć kresy $f(x, y, z) = y^3 + xz^2$ przy warunkach $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x = y$.

Zauważmy, że zbiór $W = \{(x, y, z) : x - y = 0, x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$ jest
czyli W jest zbiorem

Jest też domknięty, więc z tw. W. wynika, że $f|_W$ osiąga swe kresy.

Zatem wystarczy (z tw. Lagrange'a) zbadać (porównać wartości f) w rozwiązaniach układu:

$$\begin{cases} z^2 = \lambda \cdot 2x + \mu \cdot 1 \\ 3y^2 = \lambda \cdot 2y + \mu \cdot (-1) \\ 2xz = \lambda \cdot 2z + \mu \cdot 0 \\ x - y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \xRightarrow{IIIr.} \left(\begin{cases} z = 0 \\ x = y \\ 2y^2 + 0^2 = 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} z^2 = x \cdot 2x + \mu \\ 3y^2 = x \cdot 2y - \mu \\ \lambda = x \\ \dots \\ \dots \end{cases} \right) \xRightarrow{I+II} \\ \xRightarrow{I+II} \left(\begin{cases} z = 0 \\ x = y \\ y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} z^2 + 3y^2 = 2x^2 + 2xy \\ \dots \\ x = y \\ \dots \end{cases} \right) \Rightarrow \left(\begin{cases} z = 0 \\ x = y \\ y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} z^2 = x^2 \\ x = y \\ 3x^2 = 1 \end{cases} \right)$$

Stąd dostajemy 6 punktów krytycznych, w których wartości f są równe:

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}},$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}, \pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Na koniec zauważmy, że $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} < \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$, bo $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} < \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{8}} < \sqrt{\frac{4}{27}} \Leftrightarrow 27 < 32$.

Stąd odpowiedź:

$$\sup_W f = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right),$$

$$\inf_W f = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}, \pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right).$$