

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. NOTATKI Z WYKŁADU 9A

PRZYKŁAD. (wprowadzający) Niech $F(x, y) = (x^2 + (y - \sqrt{3})^2 - 1) \cdot (|x| - 1)^2 + y^2 - 1$.

Rozwiązaniem równania $F(x, y) = 0$ jest zbiór Z będący sumą trzech okręgów (p.rys.).

Popatrzmy na punkty $p \in Z$ i ich dostatecznie małe otoczenia U_p .

Możliwe są cztery przypadki:

- $U_p \cap Z$ jest wykresem funkcji $y = y(x)$ i funkcji $x = x(y)$;
- ♣ $U_p \cap Z$ jest wykresem funkcji $y = y(x)$ i nie jest wykresem funkcji $x = x(y)$;
- ◇ $U_p \cap Z$ jest wykresem funkcji $x = x(y)$ i nie jest wykresem funkcji $y = y(x)$;
- ♡ $U_p \cap Z$ nie jest wykresem funkcji ani $y = y(x)$, ani $x = x(y)$.

Powyższe jest łatwe, bo znamy pełne rozwiązanie owego równania. Poniższe twierdzenie pozwoli (nieco) zbadać szczególne rozwiązania skomplikowanych równań.

Na przykład pozwoli rozstrzygnąć, jakiego rodzaju (w powyższym sensie) jest punkt $(1, 2)$, będący jednym z rozwiązań równania $x^5 y + x^3 y^6 - 66 = 0$.

TWIERDZENIE 1. (o istnieniu funkcji uwikłanej)

Niech $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ będzie klasy $\mathcal{C}^1$ w otoczeniu punktu $p_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ i niech $F(p_0) = 0$.

Jeśli $F'_y(p_0) \neq 0$,

to istnieje otoczenie $(a, b) \times (c, d) \subseteq D$ punktu p_0 i funkcja $\varphi : (a, b) \rightarrow (c, d)$ taka, że

$$(*) \quad F(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x), \text{ dla wszystkich } (x, y) \in (a, b) \times (c, d).$$

Ponadto $\varphi'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$ dla wszystkich $x \in (a, b)$, $y = \varphi(x)$.

WNIOSEK. Przy założeniach jak w twierdzeniu i dodatkowo $F \in \mathcal{C}^2$. Wtedy

$$\varphi''(x) = -\frac{F''_{xx} \cdot (F'_y)^2 - 2F''_{xy} \cdot F'_x \cdot F'_y + F''_{yy} \cdot (F'_x)^2}{(F'_y)^3},$$

gdzie pochodne po prawej są liczone w punkcie (x, y) , gdzie $y = \varphi(x)$.

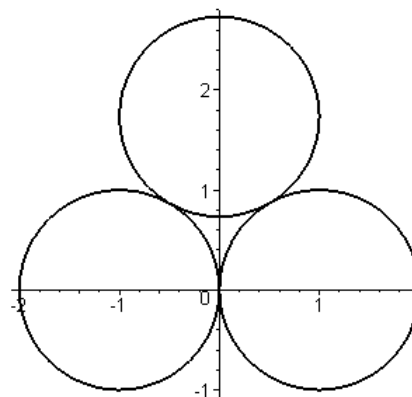
Jeśli $F'_x(x, y) = 0$ (czyli $\varphi'(x) = 0$), to $\varphi''(x) = -\frac{F''_{xx}(x, y)}{F'_y(x, y)}$, gdzie $y = \varphi(x)$.

UWAGI.

Twierdzenie NIC nie mówi, jak znaleźć p_0 , pewne rozwiązanie równania $F(p) = 0$. Trzeba je np. zgadnąć lub obliczyć jakimiś sprytnymi metodami.

Twierdzenie 'NIECO' mówi, jak 'wyglądają' inne rozwiązania w pobliżu pewnego rozwiązania p_0 , ('w pobliżu' tzn. w pewnym 'małym' prostokącie zawierającym p_0).

Problem z terminologią . . .



Zaznacz na rysunku punkty typu ♣, ◇, ♡.

DOWÓD. (tu tylko części 'ponadto')

Z (*) wynika tożsamość $F(x, \varphi(x)) = 0$, dla wszystkich $x \in (a, b)$, którą różniczkujemy stronami po x (i korzystamy z reguły łańcucha):

$$F'_x(x, \varphi(x)) + F'_y(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0,$$

skąd otrzymujemy pierwszą część 'ponadto': $\varphi'(x) = -\frac{F'_x(x, \varphi(x))}{F'_y(x, \varphi(x))}$.

Gdy $F \in \mathcal{C}^2$, otrzymaną tożsamość $\varphi' = -\frac{F'_x}{F'_y}$ (piszemy już bez argumentów, by skrócić zapis) jeszcze raz różniczkujemy stronami po x (pamiętając o regule łańcucha):

$$\varphi'' = -\frac{(F''_{xx} + F''_{yx} \cdot \varphi') \cdot F'_y - F'_x \cdot (F''_{xy} + F''_{yy} \cdot \varphi'(x))}{(F'_y)^2}.$$

Uwzględniając, że $\varphi' = -F'_x/F'_y$ i porządkując dostajemy finalnie

$$\varphi''(x) = -\frac{F''_{xx} \cdot (F'_y)^2 - 2F''_{xy} \cdot F'_x \cdot F'_y + F''_{yy} \cdot (F'_x)^2}{(F'_y)^3},$$

gdzie pochodne po prawej są liczone w punkcie $(x, \varphi(x))$. □

1. Jak wygląda rozwiązanie równania $x^3y^6+x^4y^2=20+x^2y^4$ w pobliżu punktu (2,1)?

Dla $F(x, y) = x^3y^6+x^4y^2-20-x^2y^4$ równanie jest tożsame z $F(x, y) = 0$.

Dla $p_0 = (2,1)$ mamy: $F(p_0) = 0$, $F'_y = 6x^3y^5 + 2x^4y - 4x^2y^3$ i $F'_y(2, 1) = 64 \neq 0$, więc w pewnym otoczeniu p_0 rozwiązanie jest wykresem (jakiejs) funkcji $y = \varphi(x)$, o której można powiedzieć, że:

- maleje w pobliżu p_0 , bo $F'_x = 3x^2y^6 + 4x^3y^2 - 2xy^4$ i $F'_x(2, 1) = 40$, więc funkcja φ ma pochodną $\varphi'(2) = -\frac{40}{64} = -\frac{5}{8} < 0$ i, z ciągłości, φ' jest też ujemna w pobliżu,
- ma styczną o równaniu $y = -\frac{5}{8} \cdot (x - 2) + 1$,
- jest wypukła (skąd leży powyżej tej stycznej) w pobliżu, bo $\varphi''(2) = \dots = \frac{9}{128} > 0$.

Podobnie można zbadać rozwiązanie tego równania w pobliżu punktu $(\sqrt[9]{20}, \sqrt[9]{20})$. (Nie ma ogólnego sposobu znajdowania takich punktów, trzeba je jakoś odgadnąć.)

2. Gdzie rozwiązanie równania $x^3+y^3=2xy$ ma poziomą styczną (równoległą do OX)?

Na pewno tam, gdzie (dla $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$):

$$\begin{cases} -\frac{F'_x}{F'_y} = 0 \\ F = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2y = 0 \\ x^3 + y^3 = 2xy \\ 3y^2 - 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2}x^2 \\ x^3 + (\frac{3}{2}x^2)^3 = 2x(\frac{3}{2}x^2) \\ \dots \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

Stąd w $(\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}, \frac{2}{3}\sqrt[3]{4})$ jest pozioma styczna. **Z powyższego nie wiadomo**, co z $(0, 0)$.

3. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji uwikłanej $x^2y^2 + y^4 = 5 + x^4$.

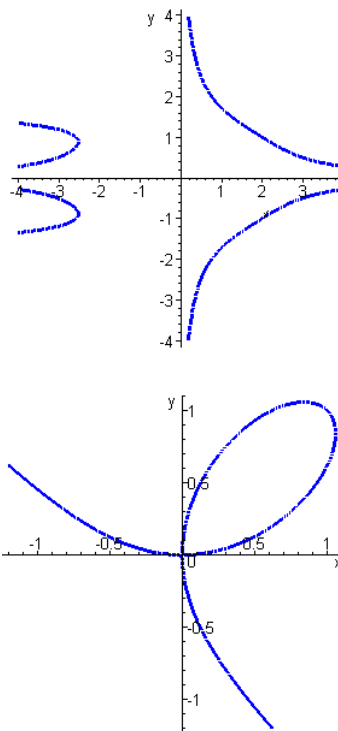
Dla $F(x, y) = x^2y^2+y^4-5-x^4$ mamy $F'_x = 2xy^2-4x^3$, $F'_y = y(2x^2+4y^2)$, $F''_{xx} = 2y^2-12x^2$.

Punkty, w krytyczne (podejrzane) spełniają układ:

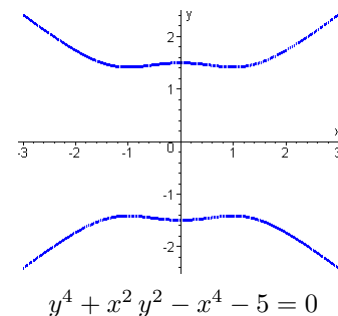
$$\begin{cases} -\frac{F'_x}{F'_y} = 0 \\ F = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

Badając znak drugiej pochodnej $= -\frac{F''_{xx}}{F'_y}$ funkcji uwikłanej rozstrzygamy jakie ekstrema lokalne ma f. uwikłana w poszczególnych punktach krytycznych:

- w $(0, \sqrt[4]{5})$ jest maksimum lokalne f. uwikłanej, (bo $-\frac{2(\sqrt[4]{5})^2-0}{\sqrt[4]{5}(0+4(\sqrt[4]{5})^2)} = -\frac{\geq 0}{> 0} < 0$)
- w $(0, -\sqrt[4]{5})$ jest minimum lokalne f. uwikłanej, (bo $-\frac{2(-\sqrt[4]{5})^2-0}{-\sqrt[4]{5}(0+4(-\sqrt[4]{5})^2)} = -\frac{\geq 0}{< 0} > 0$)
- w $(1, \sqrt{2})$ jest
- w $(1, -\sqrt{2})$ jest
- w
- w



UWAGA. Powyżej widać linię $x^3+y^3=2xy$. Podobny kształt ma linia $x^3+y^3=3xy$. Linia $x^3+y^3=3xy+48$ nie ma 'samoprzecięć'. Warto ją zbadać w punktach: $p_0 = (-4, 4)$, $p_1 = (2, 4)$, $p_2 = (-\sqrt[3]{6}, (-\sqrt[3]{6})^2)$. Jeszcze ciekawiej wyglądają linie $x^3+y^3=3xy+p$, przy $p \in [-1, 0]$.



Twierdzenie 2. (o istnieniu funkcji uwikłanej)

Niech $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ będzie klasy $\mathcal{C}^1$ w otoczeniu punktu $p_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^3$ i niech $F(p_0) = 0$.

Jeśli $F'_z(p_0) \neq 0$, to istnieje otoczenie $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (c, d) \subseteq D$ punktu p_0 i funkcja $\varphi : (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \rightarrow (c, d)$ taka, że

(*) $F(x, y, z) = 0 \iff z = \varphi(x, y)$, dla wszystkich $(x, y, z) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (c, d)$.

Ponadto $\varphi'_x(x, y) = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \varphi'_y(x, y) = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)},$

dla $z = \varphi(x, y), (x, y) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$.

Uwaga. Z (*) wynika (**) $F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$, dla $(x, y) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ (ale (*) mówi więcej!).

4. Znajdź równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $z^3 + y^2 = 16 + xyz$ w $(1, 4, 2)$.

Dla $F(x, y, z) = z^3 + y^2 - 16 - xyz$ obliczamy $F'_x(x, y, z) = -yz, F'_y(x, y, z) = 2y - xz, F'_z(x, y, z) = 3z^2 - xy$. Ponieważ $F'_z(1, 4, 2) = 3 \cdot 2^2 - 1 \cdot 4 = 8 \neq 0$, więc w pewnym otoczeniu punktu $(1, 4, 2)$ powierzchnia jest wykresem funkcji uwikłanej $z = \varphi(x, y)$.

Stąd mamy $\varphi'_x(1, 4) = -\frac{-4 \cdot 2}{3 \cdot 2^2 - 1 \cdot 4} = 1, \varphi'_y(1, 4) = -\frac{2 \cdot 4 - 1 \cdot 2}{3 \cdot 2^2 - 1 \cdot 4} = -\frac{3}{4},$

skąd dostajemy równanie pł. stycznej: $z = 2 + 1 \cdot (x - 1) - \frac{3}{4}(y - 4)$.

5. Powierzchnia P ma równanie $4x^2 + 7y^2 + 7z^2 + 8yz = 4xy + 4xz + 3$. Wiedząc, że P ma kształt elipsoidy, wyznacz jej punkt o największej zetowej współrzędnej.

Niech $F(x, y, z) = 4x^2 + 7y^2 + 7z^2 - 4xy - 4xz + 8yz - 3$.

Mamy $F'_x(x, y, z) = 8x - 4y - 4z, F'_y(x, y, z) = 14y - 4x + 8z, F'_z(x, y, z) = 14z - 4x + 8y$.

Układ równań

$$\begin{cases} -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = 0 \\ -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = 0 \\ F(x, y, z) = 0 \\ F'_z(x, y, z) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F'_x(x, y, z) = 0 \\ F'_y(x, y, z) = 0 \\ F(x, y, z) = 0 \\ F'_z(x, y, z) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 4y - 4z = 0 \\ 14y - 4x + 8z = 0 \\ 4x^2 + 7y^2 + 7z^2 + 8yz = 4xy + 4xz + 3 \\ 14z - 4x + 8y \neq 0 \end{cases}$$

ma dwa rozwiązania $p_1 = \left(\frac{1}{2\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right), p_2 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ (żmudnie!).

Dlaczego szukany punkt jest $p_1 = \left(\frac{1}{2\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$?

SPEKULACJE (o istnieniu układu funkcji uwikłanych)

Niech dla $i \leq n$ funkcje $F_i(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ ($m+n$ zmiennych; nieco dziwnie nazwanych) będą $\mathcal{C}^1$ w otoczeniu punktu $\bar{p} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$. Niech ponadto $F_i(\bar{p}) = 0$, dla $i \leq n$. Innymi słowy: $\bar{p}$ jest jednym z rozwiązań układu n równań:

$$(*) \quad \begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ F_2(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ \vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \end{cases}$$

Jak wygląda pełne rozwiązanie? AM3 nie daje odpowiedzi, ale przy dodatkowych założeniach podaje pewne informacje o rozwiązaniach w pobliżu $\bar{p}$.

Poniżej spekulacje pozwolą postawić hipotezę (co do założeń i tezy):

Wiemy, że w pobliżu $\bar{p}$ funkcje F_i można przybliżać (hiper)-płaszczyznami st stycznymi:

$$F_i(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \approx \\ \approx F_i(\bar{p}) + \frac{\partial F_i}{\partial x_1} \cdot (x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial x_m} \cdot (x_m - \bar{x}_m) + \frac{\partial F_i}{\partial y_1} \cdot (y_1 - \bar{y}_1) + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial y_n} \cdot (y_n - \bar{y}_n)$$

gdzie pochodne cząstkowe są liczone w $\bar{p}$ (więc są STAŁE!). Zatem po prawej stronie są funkcje liniowe zmiennych $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ ($F_i(\bar{p}) = 0$!).

Teraz układ (*) można **prawie zastąpić** przez poniższy

$$(**) \quad \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot x_1 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \cdot x_m + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot y_1 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \cdot y_n = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \cdot x_1 + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial x_m} \cdot x_m + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot y_1 + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \cdot y_n = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} \cdot x_1 + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \cdot x_m + \frac{\partial F_n}{\partial y_1} \cdot y_1 + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \cdot y_n = 0 \end{cases}$$

który jest układem n równań liniowych (o $m+n$ niewiadomych).

$$(\heartsuit) \quad \text{GDYBY wiedzieć, że} \quad \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \frac{\partial F_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \neq 0,$$

to (z AL) wiemy, że $y_1, \dots, y_n$ można wyrazić przy pomocy pozostałych zmiennych.

Powyższe daje nadzieję, że w pobliżu $\bar{p}$, gdy $(\heartsuit)$, to istnieją funkcje $\varphi_i(x_1, \dots, x_m)$ (o wartościach rzeczywistych) takie, że

$$(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \text{ spełnia } (*) \iff y_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_m), \text{ dla } i = 1, \dots, n,$$

że wszystkie rozwiązania (*) tworzą wykres funkcji (wektorowej) $\mathcal{F} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(x_1, \dots, x_m) = (\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_m)).$$