

ANALIZA MATEMATYCZNA 3, NOTATKI Z WYKŁADU 1.

Parametryzacją linii (łuku, krzywej) $K \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy funkcję $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, o dziedzinie $[a, b] \subset \mathbb{R}$ taką, że $F[[a, b]] = K$.

Na przykład

$$F : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(t) = (3 \cos |t|, 3 \sin |t|)$$

jest parametryzacją półokręgu K o środku $(\dots, \dots)$ i promieniu $\dots$.

Tą parametryzację można notować inaczej:

$$x(t) = 3 \cos |t|, \quad y(t) = 3 \sin |t|, \quad t \in [-\pi, \pi]$$

lub

$$x = 3 \cos |t|, \quad y = 3 \sin |t|, \quad -\pi \leq t \leq \pi,$$

lub

$$x_t = 3 \cos |t|, \quad y_t = 3 \sin |t|, \quad |t| \leq \pi.$$

Inną parametryzacją K jest:

$$x = 3 \cos |t|, \quad y = 3 \sin |t|, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi.$$

Parametryzację linii K można interpretować jako opis ruchu punktu obiegającego całe K w czasie od a do b . W momencie t tego ruchu, prędkość $(x'(t), y'(t))$ jest wektorem stycznym do K w punkcie $(x(t), y(t))$, a szybkość jest długością tego wektora (o ile istnieją pochodne $x'(t), y'(t)$).

Długość linii K tylko w niektórych parametryzacjach jest równa drodze, jaką przebywa punkt ją opisujący.

1. Funkcja $F : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $F(t) = (t^2 + 1, 3t^2 + 4)$ przekształca punkty przedziału na punkty płaszczyzny; np.: $F(-1) = (2, \dots)$, $F(-0.5) = \dots$.

a) Czy p-kt'y $(3.25, 10.75)$, $(1.09, 4.27)$, $(2.69, 9.07)$ należą do zbioru wartości F ?

b) Zbiorem wartości tej funkcji jest odcinek – jaki?

UWAGA. Mówimy też: $x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = 3t^2 + 4$, $-1 \leq t \leq 2$ jest jedną z możliwych *parametryzacji* tego odcinka, inną jest: $x = t^2 + 1$, $y = 3t^2 + 4$, $0 \leq t \leq 2$. Czym się różnią?

2. Zaznacz łuki i podaj ich długości:

a) $x = \cos t$, $y = \sin t + 1$, $t \in [0, \pi]$

b) $x = \sin t$, $y = \sin t + 1$, $t \in [0, \pi]$

c) $x = \cos(\sin t)$, $y = \sin(\sin t) + 1$, $t \in [0, \pi]$

UWAGA. Na ogół długość linii (łuku) nie jest równa długości wędrówki opisanej daną parametryzacją. Jak to jest w zad. 1 i 2?

JAK POWSTAJE CYKLOIDA?

Poniższe jest opisem tego, co widać na rysunku (w osobnym pliku).

Koło K_t o promieniu toczy się BEZ poślizgu po osi Jego środek S_t ślizga się po prostej

Parametryzacja $x_t = \dots - \dots$, $y_t = 1 - \dots$, $t \in \mathbb{R}$ opisuje *cykloidę*, linię jaką wykreśla punkt $P_t = (x_t, y_t)$ nieruchomy względem toczącego się koła K_t , leżący na brzegu koła, który w chwili $t = 0$ jest w punkcie $(\dots, \dots)$.

a) Prędkość (wektor!) punktu P_t w chwili $t = \frac{2\pi}{3}$ jest równa ,
a w chwili $t = \frac{\pi}{2}$ jest równa

b) Największa jego szybkość (liczba!) jest dla $t = \dots$

c) Może się wydawać, że dla $t = 2\pi$ wektor prędkości gwałtownie zmienia kierunek, ale TAK NIE JEST,

bowiem

.....

.....

d) Środek M_0 promienia S_0P_0 koła K_0 wyznacza inną linię o parametryzacji:

$$\hat{x}_t = \dots , \hat{y}_t = \dots , t \in \mathbb{R}$$

e) Punkt $N_0 = 1,2 \cdot P_0 + (-0,2) \cdot S_0$ przedłużenia promienia S_0P_0 koła K_0 wyznacza ciekawą linię o parametryzacji:

$$\bar{x}_t = \dots , \bar{y}_t = \dots , t \in \mathbb{R}$$

Ciekawe jest to, że w chwili $t = 2\pi$ prędkość punktu N_t , równa jest skierowana , co oznacza, że !