

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. NOTATKI Z WYKŁADU 2.A

Funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $D \subseteq \mathbb{R}^2$, parze $(x, y) \in D$ przyporządkowuje liczbę $f(x, y)$.
Jej wykresem jest zbiór

$$\{(x, y, z) : z = f(x, y), (x, y) \in D\},$$

inaczej pisząc:

$$\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}.$$

Wykres jest podzbiorem Jego rzut na płaszczyznę $z = 0$ jest 'równy'

Zbiór $f[D]$, zawarty w , jest rzutem wykresu na

* * *

1. Niech $f(x, y) = x^2 - y + 2$.

a) Oblicz: $f(2, 3) = \dots\dots\dots$, $f(3, 2) = \dots\dots\dots$, $f(0, 0) = \dots\dots\dots$,

$$f(x, 3) = \dots\dots\dots, \quad f(x, 4) = \dots\dots\dots, \quad f(x, 5) = \dots\dots\dots,$$

$$f(1, y) = \dots\dots\dots, \quad f(2, y) = \dots\dots\dots, \quad f(3, y) = \dots\dots\dots,$$

$$f(x, -x) = \dots\dots\dots$$

b) Rozwiąż równania. Co one mówią o wykresie f ?

(i) $f(x, 4) = 0$, z (i) wynika, że prosta przecina wykres w

(ii) $f(4, y) = 0$, z (ii) wynika, że

(iii) $f(x, x) = 0$, z (iii) wynika, że

(iv) $f(s, s) = 1$, z (iv) wynika, że

c) Zaznacz w (jednym) układzie współrzędnych następujące zbiory:

$$A = \{(x, y) : f(x, y) = 0\},$$

$$B = \{(x, y) : f(x, y) = \frac{1}{2}\},$$

$$C = \{(x, y) : f(x, y) = 1\}.$$

Jak je zgrabniej oznaczyć?

c') Zaznacz w (jednym) układzie współrzędnych następujące zbiory:

$$A = \{(x, z) : z = f(x, y), y = 0, x \in \mathbb{R}\},$$

$$B = \{(x, z) : z = f(x, \frac{1}{2})\},$$

$$C = \{(x, f(x, 1)) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Jak je zgrabniej oznaczyć?

d) Następujące zbiory leżą na płaszczyznach. Narysuj je (płaszczyzny i zbiory).

$$A = \{(x, y, z) : z = f(x, y) \wedge y = 1\},$$

$$B = \{(x, 2, f(x, 2)) : x \in \mathbb{R}\},$$

$$C = \{(-1, y, z) : z = f(-1, y)\},$$

$$D = \{(x, y, z) : z = f(x, y) \wedge y = x + 1\},$$

$$E = \{(x, y, f(x, y)) : x = 1\},$$

$$F = \{(x, x, z) : z = f(x, x)\}$$

2. Jak wyglądają wykresy funkcji: $f(x, y) = x^2$, $g(x, y) = x^2 - y$, $h(x, y) = x^3 - x$?

Przykład. Dla $f(x, y) = xy$ cięcie wykresu płaszczyzną $y = \dots$ jest prostą nachyloną do płaszczyzny $z = 0$ pod kątem $\pi/4$, a dla cięcia $y = -\sqrt{3}$ jest prostą nachyloną do płaszczyzny $z = 0$ pod kątem $\dots$. Cięcia wykresu płaszczyznami $x = c$ są również prostymi: $\{(c, y, z) : z = cy, y \in \mathbb{R}\}$. Zatem wykres jest sumą (nieskończoną) prostych – powierzchnia $z = xy$ jest przykładem powierzchni *prostokreślnej*.

Natomiast poziomice $f(x, y) = xy$ nie są prostymi; dla $s \in \mathbb{R}_+$

$$P_s = \{(x, y) : f(x, y) = s\} = \{(x, y) : \dots = s\} = \{(x, y) : y = s \cdot \frac{1}{\dots}\},$$

czyli są to $\dots$. Dla pozostałych s też otrzymujemy $\dots$

(z wyjątkiem $s = \dots$, gdzie dostajemy sumę $\dots$).

* * *

UMOWA. Jeśli podano wzór funkcji $f = f(x, y)$, ale jawnie nie podano dziedziny, to przyjmujemy, że dziedziną są **wszystkie** pary $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dla których wzór ma sens.

Na przykład:

- $f(x, y) = \frac{\sqrt{xy}}{\ln x}$ ma dziedzinę $D_f = \mathbb{R}_+^2 \setminus (\{1\} \times \mathbb{R}) = ((0, +\infty) \setminus \{1\}) \times (0, +\infty)$.
- $g(x, y, z) = \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1-z^2}}$ ma dziedzinę $D_g = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, |z| < 1\}$
inaczej: $D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \times (-1, 1)$, (walec bez obu podstaw)

3. Opisz (i naszkicuj) obszar będący dziedziną funkcji:

a) $f(x, y) = \ln(xy)$ b) $g(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}$