

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. NOTATKI Z WYKŁADU 2.B

SYMETRIE WYKRESÓW (NIEKTÓRYCH) FUNKCJI

(i) Dla $g(x, y) = \sin(x + |y|)$ mamy: $g(x, y) = g(x, -y)$, dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Pary punktów wykresu $(x, y, g(x, y))$, $(x, -y, g(x, -y))$ leżą symetrycznie względem płaszczyzny $y = 0$ (OXZ); ta płaszczyzna jest płaszczyzną symetrii wykresu g .
Korzyść z tego taka, że 'wystarczy zrozumieć' część wykresu, dla par z $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ – resztę 'zobaczymy w lustrze'.

(ii) Dla $f(x, y) = (x - 3)^2 + y$ mamy:
 $f(2, 5) = f(4, 5)$, $f(-1, c) = f(7, c)$, $f(5, d) = f(\dots, d)$, $f(3 + h, y) = f(3 - h, y)$.
Widać, że **parę** punktów wykresu: $(3 + h, y, f(3 + h, y))$, $(3 - h, y, f(3 - h, y))$ 'oglądają się w lustrze' $x = 3$, czyli wykres f ma płaszczyznę symetrii $x = 3$.

(iii) Niech h będzie taka, że $h(x, y) = h(8 - x, y)$, dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Mamy:
 $h(2, 5) = h(6, 5)$, $h(\dots, c) = h(8 - \dots, c)$, $h(\pi, d) = h(8 - \pi, d)$, $h(\dots + s, y) = h(8 - \dots - s, y)$.
Zatem **parę** punktów: $(\dots + s, y, h(\dots + s, y))$, $(8 - \dots - s, y, h(8 - \dots - s, y))$ 'oglądają się w lustrze' $x = 4$, czyli wykres h ma płaszczyznę symetrii $x = 4$.

(iv) Para punktów $(2, 1, 5)$, $(-2, -1, 5)$ leży symetrycznie względem osi OZ, również para $(\pi, -3, 7)$, $(-\pi, 3, 7)$ oraz $(x, \dots, z)$, $(-x, \dots, z)$.
Oś OZ jest osią symetrii wykresu $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \iff f(x, y) = f(-x, -y)$, dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

(v) Niech $L = \{(a, b)\} \times \mathbb{R}$ (prosta przechodząca przez punkty $(a, b, 0)$, $(a, b, 1)$).
 L jest osią symetrii wykresu $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \iff f(x, y) = f(x, -y)$, dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

UWAGA.

Oś OZ nie jest osią symetrii wykresu funkcji $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$, bo

(vi) Wykres $g(x, y) = 4 - |x| - |y|$ ma wiele symetrii: np.:

(vi) Jeszcze więcej ma wykres $h(x, y) = 4 - |x^2| - y^2$. Ile?

4. Dobierz odpowiednią funkcję (i jej dziedzinę) tak, by jej wykres wyglądał jak:

a) trójkąt o wierzchołkach $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 8)$

b) powierzchnia boczna stożka o wysokości $(0, 0, 0)$ $(0, 0, 2)$ i promieniu podst. = 5

c) dach dwuspadzisty domu 8×10 o wysokości 7 d) blacha falista e) wulkan

5. Jak wygląda wykres funkcji $f(x, y)$ o wzorze:

a) $\sqrt{y - x^2}$ a'') $\sqrt{y^2 - x^2}$ a''') $\sqrt{y - y^2}$ b) $\cos \sqrt{x^2 + y^2}$ b') $\frac{\cos \sqrt{x^2 + y^2}}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}$

c) $1 - \left| \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \right|$ c') $1 - \left| \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \right| \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1 \right)$