

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. NOTATKI Z WYKŁADU 3.B

DEF. Funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w $p_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^m$, gdy

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{p \in D} |p - \dots| < \delta \Rightarrow |f(\dots) - f(p_0)| < \varepsilon.$$

Innymi słowy (dla $p_0 = (x_0, y_0) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$):

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{(x,y) \in D} \sqrt{\dots^2 + \dots^2} < \delta \Rightarrow |f(\dots) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Można też tak: f jest ciągła w $p_0 \in D$, gdy albo ma w tym punkcie granicę równą $f(p_0)$, albo p_0 jest punktem izolowanym D (tzn. nie jest punktem skupienia D).

DEF. Funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, gdy f jest ciągła w każdym punkcie dziedziny.

1. Podaj zbiór wszystkich punktów, w których f jest ciągła, gdzie

$$\textbf{a)} \quad f(x, y) = [x] + y$$

Odp.: $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$

(czyli wszystkie punkty $\mathbb{R}^2$ poza punktami o całkowitej pierwszej współrzędnej)

$$\textbf{b)} \quad f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{dla } x^2 + y^2 \leq 1 \\ \sqrt{2} & \text{dla } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

Odp.: $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}) \cup \{(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \dots)\}$

Innymi 'znaczkami': $\{(x, y) : x^2 + y^2 \neq 1\} \cup \{(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \dots)\}$

'proza': (płaszczyzna bez okręgu $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$) i jeszcze jeden punkt:
(... , ...)

$$\textbf{b')} \quad f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{dla } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 1 & \text{dla } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

Odp.: $\{(x, y) : x^2 + y^2 \neq 1\} \cup \{(\dots, \dots), (\dots, \dots)\}$

'proza': dopełnienie okręgu $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ wraz punktami: (... , ...),
(... , ...)

$$\text{c) } f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{dla } (x, y) \in [0, 1]^2 \\ p & \text{dla } (x, y) \notin [0, 1]^2 \end{cases}, \quad \text{gdzie } p \in \mathbb{R} \text{ jest parametrem.}$$

ODP. Niech $B = [0, 1]^2 \setminus (0, 1)^2$ (brzeg kwadratu).
Zbiór punktów ciągłości f (w zależności od p) jest równy:

$$\begin{aligned} & \mathbb{R}^2 \setminus B \quad \text{dla } p \notin [0, \dots], \\ & (\mathbb{R}^2 \setminus B) \cup \{(p-1, 1), (1, p-1)\} \quad \text{dla } p \in [1, \dots], \\ & (\mathbb{R}^2 \setminus B) \cup \{(p, 0), (0, \dots)\} \quad \text{dla } p \in [\dots, 1]. \end{aligned} \quad \square$$

$$\text{d) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{xy^2}-1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 5y-6 & \text{dla } x = 0 \end{cases} \quad \text{e) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{xy^2}-1}{x^2+y^2} & \text{dla } x^2+y^2 > 0 \\ 0 & \text{dla } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

ROZWIĄZANIE.d)

Funkcja f jest oczywiście ciągła w punktach zbioru $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$, czyli poza osią OY .

Rozważmy punkt $p_0 = (0, y_0)$ osi OY .

Z jednej strony mamy:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow p_0 \\ x \neq 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow p_0 \\ x \neq 0}} \frac{e^{xy^2}-1}{x} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow p_0 \\ x \neq 0}} \frac{e^{xy^2}-1}{xy^2} \cdot \frac{xy^2}{x} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow p_0 \\ x \neq 0}} \frac{e^{xy^2}-1}{xy^2} \cdot y^2 = 1 \cdot y_0^2,$$

gdzie ostatnia równość wynika z LEMAT $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^s-1}{s} = 1$.

(Lemat jest dla funkcji **jednej** zmiennej i można go dowieść regułą d'H ...)

Można go zastosować, bo $s := x^2y$ dąży do $0^2y_0 = 0$, przy $(x, y) \rightarrow (0, y_0)$.

Z drugiej strony:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,y_0) \\ x=0}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,y_0) \\ x=0}} 5y-6 = 5y_0-6 = f(0, y_0).$$

Zatem f jest ciągła w $p_0 = (0, y_0) \iff y_0^2 = 5y_0 - 6 \iff y_0 \in \{2, 3\}$.

ODP. Zbiór punktów ciągłości f jest równy: $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \cup \{(0, 2), (0, 3)\}$. $\square$

Dowody poniższych twierdzeń są 'smutne' (wystarczy zastosować def.).

Tw. Niech f_1 i f_2 będą ciągłe w punkcie p . Wtedy w punkcie p są ciągłe:

$$\begin{aligned} f(p) &:= f_1(p) \pm f_2(p), & f(p) &:= f_1(p) \cdot f_2(p), \\ f(p) &:= 2^{f_1(p)+f_2(p)}, & f(p) &:= f_1(p) \cdot \sin(f_2(p)). \end{aligned}$$

Jak pierwsze dwa 'wysłowić prozą'? Jak uogólnić ostatnie dwa przykłady?

Tw. Niech $g_1, g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą ciągłe: g_1 w x_0 i g_2 w Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągła w punkcie

Wtedy funkcja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x, y) = f(g_1(x), \dots)$ jest ciągła w punkcie