Przykład. Niech $\Phi = \Phi(m, r) = G\dfrac{M \cdot m}{r^2}$.

Okazuje się jednak, że m, r nie są zmiennymi wolnymi,
są funkcjami pewnej zmiennej t, czyli: $m = m(t)$ oraz $r = r(t)$.

Wtedy $F = F(t) = \Phi\left(m(t), r(t)\right) = G\dfrac{M \cdot m(t)}{\left(r(t)\right)^2}$.

Prolem(ik). Jak wyznaczyć $F' = \frac{dF}{dt}$?

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \frac{G\frac{M\cdot m(t+h)}{(r(t+h))^2} - G\frac{M\cdot m(t)}{(r(t))^2}}{h} =$$

$$= \frac{G\frac{M\cdot m(t+h)}{(r(t+h))^2} - G\frac{M\cdot m(t)}{(r(t+h))^2}}{h} + \frac{G\frac{M\cdot m(t)}{(r(t+h))^2} - G\frac{M\cdot m(t)}{(r(t))^2}}{h} =$$

$$= \frac{G\frac{M\cdot m(t+h)}{(r(t+h))^2} - G\frac{M\cdot m(t)}{(r(t+h))^2}}{m(t+h) - m(t)} \cdot \frac{m(t+h) - m(t)}{h} + \frac{G\frac{M\cdot m(t)}{(r(t+h))^2} - G\frac{M\cdot m(t)}{(r(t))^2}}{r(t+h) - r(t)} \cdot \frac{r(t+h) - r(t)}{h}$$

$$\underset{h\to 0}{\to} \quad \Phi'_m \quad \cdot \quad m' \quad + \quad \Phi'_r \quad \cdot \quad r'$$

Jest to przykład (najprostszej?) reguły łańcucha.

Inną wersję reguły łancucha dostajemy w nieco ogólniejszej sytuacji:

Gdy $F = F(t, x, y) = \Phi\left(m(t, x, y), r(t, x, y)\right)$, to F ma **trzy** pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial m}\cdot\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial t},\ \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial m}\cdot\frac{\partial m}{\partial x} + \text{.....},\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial m}\cdot\frac{\partial m}{\partial y} + \text{.....}$$

Gdyby M nie było stałą, np. $M = M(t, x, y)$, to $\Phi = \Phi(M, m, r)$.
Wtedy wygodnie jest myśleć, że funkcje m, r formalnie też zależą od x, y (nie tylko od t). Teraz złożenie zależy od trzech zmiennych:

$$F = F(t, x, y) = \Phi\left(M(t, x, y), m(t, x, y), r(t, x, y)\right)$$

i mamy:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial M}\cdot\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial m}\cdot\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial t},$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial M}\cdot\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial m}\cdot\frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x},$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial M}\cdot\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial m}\cdot\frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}.$$

TW. Niech $f(x,y,z),\ x(s,t),\ y(s,t),\ z(s,t)$ będą klasy $\mathcal{C}^1$.
Wtedy dla $F(s,t) = f(x(s,t), y(s,t), z(s,t))$
mamy:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}.$$

D-D. (szkic dowodu pierwszego wzoru):

$$\frac{f(x(s+h,t),y(s+h,t),z(s+h,t)) - f(x(s,t),y(s,t),z(s,t))}{h} = \quad \{\text{dalej trik: } +cosik - cosik...\}$$

$$= \frac{f(x(s+h,t),y(s+h,t),z(s+h,t)) - f(x(s,t),y(s+h,t),z(s+h,t))}{x(s+h,t)-x(s,t)} \cdot \frac{x(s+h,t)-x(s,t)}{h} +$$

$$+ \frac{f(x(s,t),y(s+h,t),z(s+h,t)) - f(x(s,t),y(s,t),z(s+h,t))}{y(s+h,t)-y(s,t)} \cdot \frac{y(s+h,t)-y(s,t)}{h} +$$

$$+ \frac{f(x(s,t),y(s,t),z(s+h,t)) - f(x(s,t),y(s,t),z(s,t))}{z(s+h,t)-z(s,t)} \cdot \frac{z(s+h,t)-z(s,t)}{h}$$

$$\underset{h\to 0}{\to} f'_x(x(s,t),y(s,t),z(s,t))\cdot x'_s(s,t) +$$
$$+ f'_y(x(s,t),y(s,t),z(s,t))\cdot y'_s(s,t) +$$
$$+ f'_z(x(s,t),y(s,t),z(s,t))\cdot z'_s(s,t).$$

Szczegóły uzupełniają: tw. Lagrange'a i założenia ciągłości. □

PRZYKŁAD. Niech $f(x,y,z) = x + xy^2z^3,\ x(s,t) = s+t^2,\ y(s,t) = s^2 - t,\ z(s,t) = st$ i $F(s,t) = f(x(s,t), y(s,t), z(s,t))$. Można podstawić i żmudnie obliczać F'_s i F'_t, ALE powyższa reguła pozwala niemal automatycznie podać:

$$F'_s = f'_x\cdot x'_s + f'_y\cdot y'_s + f'_z\cdot z'_s = (1+y^2z^3)\cdot(1) + (2xyz^3)\cdot(2s) + (3xy^2z^2)\cdot(t) =$$
i dalej wstawiamy za x, y, z:
$$= (1 + (s^2-t)^2(st)^3) + 2(s+t^2)(s^2-t)(st)^3\cdot 2s + 3(s+t^2)(s^2-t)^2(st)^2\cdot t,$$

$$F'_t = \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ .$$

PRZYKŁAD. Niech $z = ue^v + ve^{-u};\ u = \ln r,\ v = s\cdot\ln r$. Wtedy

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial r} = (e^v - ve^{-u})\cdot\frac{1}{r} + (ue^v + e^{-u})\cdot\frac{s}{r} = \ \ldots\ldots$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial s} = (e^v - ve^{-u})\cdot 0 + (ue^v + e^{-u})\cdot\ln r = \ \ldots\ldots$$

TW. Niech $f(x_1,\ldots,x_k)$ i $x_1(t_1,\ldots,t_n),\ldots,x_k(t_1,\ldots,t_n)$ będą funkcjami klasy $\mathcal{C}^1$. Wtedy złożenie $F(t_1,\ldots,t_n) = f\left(x_1(t_1,\ldots,t_n),\ldots,x_k(t_1,\ldots,t_n)\right)$ jest też klasy $\mathcal{C}^1$ o pochodnych cząstkowych:

$$\frac{\partial F}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial t_1}\ ,$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial F}{\partial t_n} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_n} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial t_n}\ .$$ □

Regułę łańcucha wygodniej jest zanotować rachunkiem macierzowym, co pomijamy.