

# ANALIZA MATEMATYCZNA 3. LISTA 10.

1. Które całki można obliczyć BEZ rachunku całkowego?      a)  $\iint_{[0,1]^2} 2x + 3y \, d\omega$

b)  $\iint_{[0,1]^2} e^{[x+y]} \, d\omega$       c)  $\iint_{[-1,1]^2} e^{[x+y]} \, d\omega$       d)  $\iint_{[0,1]^2} x^2 y^3 \, d\omega$       e)  $\iint_{[-1,1]^2} x^2 y^3 \, d\omega$

f)  $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 y^3 \, d\omega$       g)  $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{x^2+y^2} \, d\omega$       h)  $\iint_{[-1,1]^2} |x+y| \, d\omega$

2. Niech  $\omega_n$  oznacza podział  $[0, 1]^2$  na  $n^2$  przystających kwadratów ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 10^6$ ).

Dla  $\iint_{[0,1]^2} f(x, y) \, d\omega$  oblicz (sprytnie) różnicę  $S_{\omega_n} - s_{\omega_n}$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{\omega_n} - s_{\omega_n})$  gdy

a)  $f(x, y) = [y^7]$       b)  $f(x, y) = \{y\}$       c)  $f(x, y) = y^2$       d)  $f(x, y) = x + y$

e)  $f(x, y) = [\pi y]$       f)  $f(x, y) = \pi x + e y$       g)  $f(x, y) = e^y$       h)  $f(x, y) = e^x + y^5$

\* \* \*

3. Oblicz całki iterowane (podaj całki podwójne/potrójne, z których powstały).

a)  $\int_2^4 \int_3^7 xy \, dx dy$       b)  $\int_1^2 \int_{x-1}^{x+1} xy \, dy dx$       c)  $\int_4^6 \int_1^2 \int_2^3 xyz \, dx dy dz$       d)  $\int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^2 yz^2 \, dz dy dx$

4. Zapisz  $\iint_A y \, d\omega$  jako całkę iterowaną i oblicz, gdy  $A$  jest ograniczony przez linie

a)  $|x| = 2$ ,  $|y| = 1$       b)  $y = x^2$ ,  $y = x + 6$       c)  $y = x^4$ ,  $y = x^3$       d)  $x + (y - 1)^2 = 1$ ,  $x = 0$

5. Zmień kolejność całkowania i oblicz (prostsza wersja).      z)  $\int_0^{2\pi} \int_1^e (\sin y) x^{1/x} \, dx dy$

a)  $\int_2^3 \int_0^{\sqrt{y}} x^3 \, dx dy$       b)  $\int_1^2 \int_1^y xy \, dx dy$       c)  $\int_{-1}^1 \int_0^{1-|y|} y^2 \, dx dy$       d)  $\int_1^2 \int_{2-x}^{x^2} 1 \, dy dx$

e)  $\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt[3]{x}} 6x + y \, dy dx$       f)  $\int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} y + 2 \, dy dx$       g)  $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} 3x \, dy dx$       h)  $\int_1^2 \int_3^5 \int_6^9 z \, dx dy dz$

6. Oblicz:

a)  $\iint_L y \, d\omega$ , gdy  $L$  jest trójkątem o wierzchołkach  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, -1)$

b)  $\iint_R |x^2 - y| \, d\omega$ , gdzie  $R = [0, 1] \times [0, 1]$

c)  $\iint_K x \, d\omega$ , gdy  $K$  jest kołem ośrodku  $(3, 4)$  i promieniu 2. (Można sprytnie :)

ZADANIE 1 jest dość trudne; w niektórych podpunktach widać bryły znane sprzed matury, a w niektórych widać... zero.

SPOSTRZEŻENIA. (pomocne w zadaniu 2.)

♣ Gdy obliczamy  $S_\omega - s_\omega$ , wystarczy patrzeć tylko na te elementy podziału, gdzie  $f$  nie jest stała.

$$\diamond \quad S_\omega - s_\omega = \left( \sum_i \sup_{P_i} f \cdot |P_i| \right) - \left( \sum_i \inf_{P_i} f \cdot |P_i| \right) = \sum_i (\sup_{P_i} f - \inf_{P_i} f) \cdot |P_i|.$$

♡ Gdy wszystkie elementy podziału mają to samo pole  $|P_i| = p$ ,  
to  $S_\omega - s_\omega = p \cdot \sum_i (\sup_{P_i} f - \inf_{P_i} f)$ .

♠ Gdy na wszystkich elementach podziału jednakowa jest różnica  $\sup_{P_i} - \inf_{P_i} = c$ ,  
to  $S_\omega - s_\omega = c \cdot \sum_i |P_i| = c \cdot |P|$ .

PRZYKŁAD. (jak w zadaniu 3.)

$$\begin{aligned} \int_0^6 \int_0^1 xy + ye^x \, dx dy &= \int_0^6 \left( \int_0^1 xy + ye^x \, dx \right) dy = \int_0^6 \left[ \frac{1}{2} x^2 y + ye^x \right]_0^1 dy = \\ &= \int_0^6 y \left( e - \frac{1}{2} \right) dy = \left[ \frac{1}{2} y^2 \left( e - \frac{1}{2} \right) \right]_0^6 = 18 \left( e - \frac{1}{2} \right) = 18e - 9 \end{aligned}$$

$$\int_0^6 \int_0^1 xy + ye^x \, dx dy = \iint_{[0,1] \times [0,6]} xy + ye^x \, d\omega$$

(P)ODPOWIEDZI do niektórych zadań z listy 10. (wg Maximy)

2. a)–g)  $S_{\omega_n} - s_{\omega_n} : \frac{2n-1}{n^2}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{\pi+e}{n}, \frac{e-1}{n}$  (odpowiednio)

3. Wartości całek: a) 120, b)  $\frac{14}{3}$ , c)  $\frac{75}{2}$ , d)  $\frac{16}{9}$

4. Wartości całek: b)  $\frac{250}{3}$ , c)  $\frac{1}{63}$ , d)  $\frac{4}{3}$

5. Wartości całek: a)  $\frac{19}{12}$ , b)  $\frac{9}{8}$ , c)  $\frac{1}{6}$ , d)  $\frac{11}{6}$ , e)  $\frac{89}{70}$ , f)  $\frac{192}{5}$ , g) 12, h) 9

6. Wartości całek: b)  $\frac{11}{30}$ , c)  $12\pi$