

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. LISTA 11.

1. Wyraż całki we współrzędnych biegunowych. Oblicz je.

$$\text{a)} \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \sin(x^2 + y^2) dx dy \quad \text{b)} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} y dy dx \quad \text{c)} \int_1^2 \int_0^x \pi dy dx$$

$$\text{d)} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{3}} xy dy dx + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy dy dx \quad \text{e)} \int_{-3/\sqrt{2}}^{3/\sqrt{2}} \int_{|x|}^{\sqrt{9-x^2}} \frac{y}{x^2 + y^2} dy dx$$

$$\text{g)} \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} |y - \sqrt{3}x| dy dx \quad \text{h)} \int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx \quad \text{i)} \iint_{x^2 + y^2 \leq y} \sqrt{x^2 + y^2} d\omega$$

2. Zapisz $\iint_S f(x, y) d\omega$ jako całkę iterowaną lub sumę całek iterowanych w układzie biegunowym i w układzie kartezjańskim:

$$\text{a)} S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \sqrt{2} \wedge x \leq 0\} \quad \text{b)} S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4x \wedge |y|\sqrt{3} \leq x\}$$

$$\text{c)} S = \{(x, y) : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 4y\} \quad \text{d)} S = \{(x, y) : |y| \leq x \leq 4\} \quad \text{e)} S = [0, 1]^2$$

3. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami (gdy jest więcej niż jedna, to oblicz objętość najmniejszej):

$$\text{a)} x + y + z = 4, x = y, y = 0, z = 0 \quad \text{b)} z = 4, x^2 + y^2 = z$$

$$\text{c)} x^2 + y^2 + z^2 = 2z, x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{d)} 2z = (x - 1)^2 + y^2, x + z = 5$$

$$\text{e)} z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 = 20 \quad \text{f)} x^2 + y^2 = 4x, x^2 + y^2 = z^2, z = 0$$

4. Wyznacz pole powierzchni

$$\text{a)} \text{ płata } f(x, y) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} \text{ nad trójkątem } \Delta(0, 0), (0, 1)(1, 0)$$

$$\text{b)} \text{ części pow. } z = x^2 \text{ leżącej nad trójkątem o wierz. } (0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0)$$

$$\text{c)} \text{ bryły } V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + 5 \leq x^2 + y^2 + z \leq 9\} \quad \text{c')} \text{ bryły } x^2 + y^2 + |z| \leq 9$$

$$\text{d)} \text{ części sfery } 16 = x^2 + y^2 + z^2 \text{ leżącej w walcu } \text{d')} x^2 + y^2 = 4 \quad \text{d'')} x^2 + y^2 = 4x$$

$$\text{e)} \text{ wykresu f-cji } f : P \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = a\sqrt{x^2 + y^2}$$

5. Znajdź p takie, że objętość B jest równa 1, gdy B jest ograniczona powierzchniami

$$\text{a)} x^2 + y^2 = z^2, z = p \quad \text{a')} x^2 + y^2 = pz^2, z = 1 \text{ WSK.a), a')} \text{ można bez całek}$$

$$\text{b)} x^2 + y^2 = z, z = p \quad \text{b')} x^2 + y^2 = pz, z = 1$$

6. Czy równoleżniki: $0^\circ, \pm 45^\circ$ dzielą skorupę ziemską (=sferę) na części o jednakowych polach? A południki $0^\circ, \pm 30^\circ, \pm 60^\circ$?

7. (Wypełniać przed kartkówką k5)

Zapisz całkę iterowaną podając wyrażenia a, b, c, d (uważaj na kolejność!):

a') dla czworoscianu C o wierzchołkach $(0, 0, 0), (2, 0, 0), (2, 9, 0), (0, 0, 8)$

$$\iiint_C g(x, y, z) d\omega = \int_0^2 \int_a^b \int_c^d g(x, y, z) dz dy dx \quad (\text{w ukl. kartezjańskim})$$

$$a = \dots \quad b = \dots \quad c = \dots \quad d = \dots$$

a'') dla czworoscianu C o wierzchołkach $(0, 0, 0), (2, 0, 0), (2, 9, 0), (0, 0, 8)$

$$\iiint_C g(x, y, z) d\omega = \int_0^9 \int_a^b \int_c^d g(x, y, z) dz dx dy \quad (\text{w ukl. kartezjańskim})$$

$$a = \dots \quad b = \dots \quad c = \dots \quad d = \dots$$

$$\text{b')} \iint_{\substack{x^2 + y^2 \leq 7 \\ x \geq 0, y \leq -\sqrt{3} \cdot x}} g(x, y) d\omega = \int_a^b \int_c^d g(x, y) dy dx \quad (\text{w ukl. kartezjańskim})$$

$$a = \dots \quad b = \dots \quad c = \dots \quad d = \dots$$

$$\text{b'')} \iint_{\substack{x^2 + y^2 \leq 7 \\ x \geq 0, y \leq -\sqrt{3} \cdot x}} g(x, y) d\omega = \int_a^b \int_c^d g(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r dr d\varphi \quad (\text{w ukl. biegunowym})$$

$$a = \dots \quad b = \dots \quad c = \dots \quad d = \dots$$

c') dla zbioru C punktów pierwszej ćwiartki, które leżą w kole o środku $(0, 0)$ i pr. 9 i nie leżą w kole o środku $(\frac{9}{2}, 0)$ i pr. $\frac{9}{2}$

$$\iint_C g(x, y) d\omega = \int_a^b \int_c^d g(x, y) dy dx \quad (\text{w ukl. kartezjańskim})$$

$$a = \dots \quad b = \dots \quad c = \dots \quad d = \dots$$

c'') dla zbioru C punktów pierwszej ćwiartki, które leżą w kole o środku $(0, 0)$ i pr. 9 i nie leżą w kole o środku $(\frac{9}{2}, 0)$ i pr. $\frac{9}{2}$

$$\iint_C g(x, y) d\omega = \int_a^b \int_c^d g(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r dr d\varphi \quad (\text{w ukl. biegunowym})$$

$$a = \dots \quad b = \dots \quad c = \dots \quad d = \dots$$

(P)ODPOWIEDZI do niektórych zadań z listy 11. (wg Maximy)

$$\int \cos^3 \varphi d\varphi = \sin \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi + C \quad \int \sin^3 \varphi d\varphi = -\cos \varphi + \frac{1}{3} \cos^3 \varphi + C$$

$$1. \text{ a)} \frac{\pi}{2}(1 - \cos 1) \quad \text{b)} \frac{2}{3} \quad \text{c)} \frac{3\pi}{2} \quad \text{d)} \frac{3}{2} \quad \text{e)} 3\sqrt{2} \quad \text{g)} } 27 - 9\sqrt{3} \quad \text{h)} \frac{4}{9}$$

$$3. \text{ a)} \frac{16}{3} \quad \text{b)} 8\pi \quad \text{c)} \frac{\pi}{3} \quad \text{d)} \frac{81\pi}{4} \quad \text{e)} \frac{8\pi}{3}(10\sqrt{5} - 19) \quad \text{f)} \frac{256}{3}$$

$$4. \text{ a)} \frac{4+4\sqrt{2}}{15} \quad \text{b)} \frac{1}{12}(5\sqrt{5} - 1) \quad \text{c')} \frac{\pi}{3}(37\sqrt{37} - 1) \quad \text{d')} 32\pi(2 - \sqrt{3}) \quad \text{d'')} 16(\pi - 2)$$