

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. LISTA 12.

1. Wyraż całki we współrzędnych cylindrycznych i oblicz je.

a) $\iiint_A x^2 + y^2 dV$ gdzie A jest wyznaczone przez pow. $x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 4$

b) $\iiint_B z dV$ dla $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x, y, z \geq 0\}$ c) $\int_0^3 \int_0^x \int_0^2 x dz dy dx$

d) $\iiint_D y^2 dV$ gdzie D jest wyznaczone przez pow. $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 1$

2. Wyraż całki jako całki iterowane w nowych podanych współrzędnych (nie obliczaj ich)

a) $\int_1^2 \int_4^9 x \sqrt{y} dy dx$ $\begin{cases} x = u \\ y = v^2 \end{cases}$ b) $\iint xy d\omega$ $\begin{cases} x = u - v \\ y = u + v \end{cases}$ c) $\int_1^2 \int_0^{x^2} y dy dx$ $\begin{cases} x = \sqrt{u} \\ y = v \end{cases}$
 $1 \leq x+y \leq 2$
 $3 \leq y-x \leq 4$

3. Znajdź nowe współrzędne, w których obszar całkowania jest kołem o środku (0,0), lub jego częścią i wyraż całki w nowych podanych współrzędnych (nie obliczaj ich)

a) $\iint_{(x-3)^2 + (y-4)^2 \leq 9} xy d\omega$ b) $\iint_{(4x-12)^2 + 9y^2 \leq 4, y \leq 0, x \geq 3} xy d\omega$ c) $\int_0^2 \int_{-3\sqrt{4-x^2}}^{3\sqrt{4-x^2}} xy dy dx$

3'. Oblicz: a) $\iint_{(x+5)^2 + 4(2y+1)^2 \leq 9} xy d\omega$ b) $\iint_{(x+y)^2 + (2x+3y)^2 \leq 4} xy d\omega$

4. Wyraż całki w nowych podanych współrzędnych i oblicz je.

a) $\int_2^3 \int_{\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} xy dy dx$ $\begin{cases} s = x \\ t = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$ b) $\int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y)^{10} dy dx$ $\begin{cases} x = s \cos^2 t \\ y = s \sin^2 t \end{cases}$
 * * *

5. Uzasadnij, że jacobian przejście ze współrzędnych kartezjańskich na sferyczne jest równy $J = r^2 \sin \theta$.

6. Przedstaw całkę $I = \iiint_V x^2 + y^2 + z^2 dV$ jako całkę iterowaną we współrzędnych:

a) kartezjańskich b) cylindrycznych c*) sferycznych,
 gdy V jest mniejszą z brył ograniczonych pow. $z = \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
 Oblicz też wartość I .

(P)ODPOWIEDZI do niektórych zadań z listy 12.

$$\int x^3 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int x^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}(a^2 - x^2)^{3/2}\right)' dx = \dots$$

1. a) 2π b) $\frac{\pi}{16}$ c) 18 d) $\frac{2\pi}{5}(\frac{64}{3} - 11\sqrt{3}) \vee \frac{22\pi}{5}\sqrt{3}$

3'. a) $\frac{45}{8}\pi$ b) $\pm 12\pi$ (jest tu wiele zer!)

4. a) $\frac{45}{4}$ b) $\frac{1}{12}$

6. $I = \frac{32\pi}{5}(2 - \sqrt{3})$

UKŁAD SFERYCZNY

Podpisując długości kresek za pomocą r, φ, θ otrzymujemy wzór

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$$

przekształcenia z 'nieskończonego pół-prostopadłościanu'

$$0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, r \geq 0$$

(w układzie $Or\theta\varphi$) na całą przestrzeń $\mathbb{R}^3$ (w układzie $Oxyz$).

W tym przekształceniu obrazem prostokąta: $r = 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ jest punkt $(0, \dots, \dots)$, a obrazem prostokąta $r = 3, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ jest sfera o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = \dots$

Obrazem półprostej $\theta = \frac{\pi}{4} = \varphi$ jest półprosta $x = y = \dots$

Inne przykłady (strzałka $\rightarrow$ oznacza 'jest przekształcane na'):

$\theta = 0 \rightarrow$ pół sfera $O\dots$, $\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow$ pł. stożka $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow$ pł. $z = \dots$,
 $r \in \dots \rightarrow$ obszar $4 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, $r \leq 3 \cos \theta \rightarrow$ kula $x^2 + y^2 + (z - \dots)^2 \leq \dots$,
 $r \leq -3 \cos \theta \rightarrow$ kula $x^2 + y^2 + (z - \dots)^2 \leq \dots$, $r = \frac{4}{\cos \theta} \rightarrow$ płaszczyzna $z = \dots$

PRZYKŁAD. Dla różnicy kul $V = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\$