

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. LISTA 13.

1. Oblicz całki krzywoliniowe nieskierowane: $\int_A |x| + y \, d\ell$, $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$,
 $\int_B x(\arctg y)^7 \, d\ell$, $B = \{(x, x^2) : |x| \leq 1\}$, $\int_C x + y \, d\ell$, $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 2x + 4y\}$,
 $\int_D \frac{d\ell}{x^2}$, $D = A \cap ([\frac{1}{2}, 2] \times \mathbb{R})$, $\int_E \frac{y}{\sqrt{4x^2 + 1}} \, d\ell$, $E = \{(x, x^2) : -1 \leq x \leq 2\}$, $\int_E x \, d\ell$,
 $\int_F x - y - z \, d\ell$, $F =$ odcinek $(1, 2, 3)(6, 5, 4)$, $\int_G z^2 \, d\ell$, $G = \{(x, 2x, 2x) : x \in [0, 2]\}$

2. Oblicz całki powierzchniowe a) $\iint_S x \, dS$, gdzie $S = [0, 1]^3 \setminus (0, 1)^3$
b) $\iint_{2x+4y+2z=8, x,y,z \geq 0} xz \, dS$ c) $\iint_{x^2+y^2+z^2=4, x,y,z \geq 0} yz \, dS$ d) $\iint_{(x+y)^2+z^2=1, x,y,z \geq 0} \sqrt{\frac{1-(x+y)^2}{1+(x+y)^2}} \, dS$
e) $\iint_{z=x^2+y^2, x,y \in [0,1]} xy \, dS$ f) $\iint_P 2x + z \, dS$, $P = \{(x, y, 3-2x+2y) : x, y \in [0, 5]\}$
g) $\iint_W y + x^2 \, dS$, gdy W jest powierzchnią boczną walca $x^2 + y^2 = 9$, $0 \leq z \leq 2$
* * *

3. Niech $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0\}$. Znajdź masę K , gdy gęstość w punkcie (x, y, z) jest równa a) odległości (x, y, z) od płaszczyzny $z = 0$
b) kwadratowi odległości (x, y, z) od płaszczyzny $z = 0$
3'. Niech $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0\}$ oraz $L = K \cap (\{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Znajdź masę L , gdy gęstość w punkcie (x, y, z) jest kwadratem odległości (x, y, z)
x) od osi OX y) od osi OY z) od osi OZ xy) od płaszczyzny $z = 0$
4. Zakładając, że gęstość jest stała, znajdź środek masy a) $\{(x, y) : 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$
b) półokręgu b') półkola b'') półkuli b''') półsfery

UMOWA. Poniżej 'wyznacz' oznacza 'zapisz jako całkę iterowaną lub sumę całek iterowanych'. Niektóre z tych całek można obliczyć 'do końca' – które?

5. Wyznacz masę powierzchni bocznej stożka o wysokości H i pr. podstawy R , gdy gęstość (powierzchniowa) jest kwadratem odległości:
a) od podstawy b) od wierzchołka c) od środka wysokości
5'. Wyznacz energię kinetyczną powierzchni z zadania 5., gdy kręci się wokół wysokości w tempie 7 obrotów na sekundę.
6. Wyznacz masę piramidy o wysokości 3 i podstawie 2×2 , jeżeli gęstość jest proporcjonalna
a) do kwadratu odległości od wierzchołka i w środku podstawy jest równa 3
b) do sześciangu odległości od podstawy i w (górnym) wierzchołku jest równa 5.

(P)ODPOWIEDZI do niektórych zadań z listy 13.

Dla $n = 1..8$ ciąg $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$ jest równy $\left(1, \frac{\pi}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3\pi}{16}, \frac{8}{15}, \frac{5\pi}{32}, \frac{16}{35}, \frac{35\pi}{256}\right)$.

1. A) 4 C) $6\sqrt{5}\pi$ D) $2\sqrt{3}$ G) 32
2. a) 3 b) $\frac{16}{3}\sqrt{6}$ c) $\frac{8}{3}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{122-25\sqrt{5}}{120}$ f) 600 g) 54π ('na palcach')
3. a) 27π b) 54π
3'. x) 27π y) $\frac{27}{2}\pi$ z) $\frac{27}{2}\pi$ xy) $\frac{27}{2}\pi$
4. a) $(0, \frac{2}{5})$ odl. od środka: b) $\frac{2}{\pi}R$ b') $\frac{4}{3\pi}R$ b'') $\frac{3}{8}R$ b''') $\frac{1}{2}R$
5. a) $\frac{1}{6}\pi H^2 R \sqrt{R^2 + H^2}$ b) $\frac{1}{6}\pi R \sqrt{R^2 + H^2} (3R^2 + H^2)$
5'. a) $\frac{49}{15}\pi^3 H^2 R^3 \sqrt{R^2 + H^2}$ b) $\frac{49}{15}\pi^3 R^3 \sqrt{R^2 + H^2} (10R^2 + H^2)$
6. a) $\frac{116}{15}$ b) 1

ŚCIAGA. Niech figura $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ma gęstość powierzchniową $\rho = \rho(x, y)$. Współrzędne jej środka masy $S = (S_x, S_y)$ wyrażają się wzorami
 $S_x = \frac{1}{M} \iint_B x \cdot \rho(x, y) \, d\omega$, $S_y = \frac{1}{M} \iint_B y \cdot \rho(x, y) \, d\omega$, gdzie masa $M = \iint_B \rho(x, y) \, d\omega$.
Analogiczne są wzory na środek masy S bryły $B \subseteq \mathbb{R}^3$ o gęstości $\rho = \rho(x, y, z)$.

UWAGA.
Przy liczeniu środka masy, dość często wystarczy liczyć tylko jedną współrzędną; pozostała(e) bywają oczywiste (z symetrii zbioru i własności gęstości).