

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. LISTA 14.

0. Oblicz 'na palcach' a) $\int_{(1,1)(9,2)} (1,4) \circ d\vec{r}$ b) $\int_{\text{brzeg } [0,1]^2} (1,4) \circ d\vec{r}$ c) $\int_{x^2+y^2=5} (y,-x) \circ d\vec{r}$

1. Oblicz całki krzywoliniowe skierowane (korzystając z parametryzacji krzywych)

a) $\int_A \vec{F} \circ d\vec{r}$, dla $\vec{F}(x,y) = (xy,x)$, gdzie A – odcinek od $(0,1)$ do $(3,3)$

b) $\int_B x^2 dx + (x-y) dy$, B – część paraboli $y^2 = x$ od $(1,-1)$ do $(1,1)$

c) $\int_{(1,0,3)(2,3,1)} (x+3z) dx + y dz$ d) $\int_D (x^2+y^2, 5) \circ d\vec{r}$, D = okr. o śr. $(0,2)$ i pr. 2

2. Oblicz całkę, gdy Γ jest krzywą gładką (wykorzystując potencjał pola)

a) $\int_{\Gamma} (\pi x + y) dx + (x - 2y) dy$, krzywa Γ od $A = (0,1)$ do $B = (2,3)$

b) $\int_{\Gamma} (e^x + y^2) dx + 2y(x+1) dy$, krzywa Γ od $A = (0,1)$, $B = (s,t)$

c) $\int_{\Gamma} y dx + (x+z) dy + y dz$, krzywa Γ od $A = (-1,1,0)$ do $B = (3,4,5)$

3. Oblicz całkę $\int_K \vec{F} \circ d\vec{r}$, gdzie K jest brzegiem Ω (korzystając z tw. Greena)

a) $\vec{F}(x,y) = (y^2 - y, (x+y)^2)$, $\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 2y\}$ a') $\Omega = [0,1]^2$

b) $\vec{F} = (P,Q)$, gdzie $P = xe^{x^2+y^2}$, $Q = ye^{x^2+y^2}$ i $\Omega = \{(x,y) : 4x^2 + 9y^2 \leq 1\}$

c) $\vec{F} = (0,xy)$, $\Omega = [0,2] \times [0,3]$ c') $\Omega = \{(x,y) : x^4 + y^4 \leq 1\}$

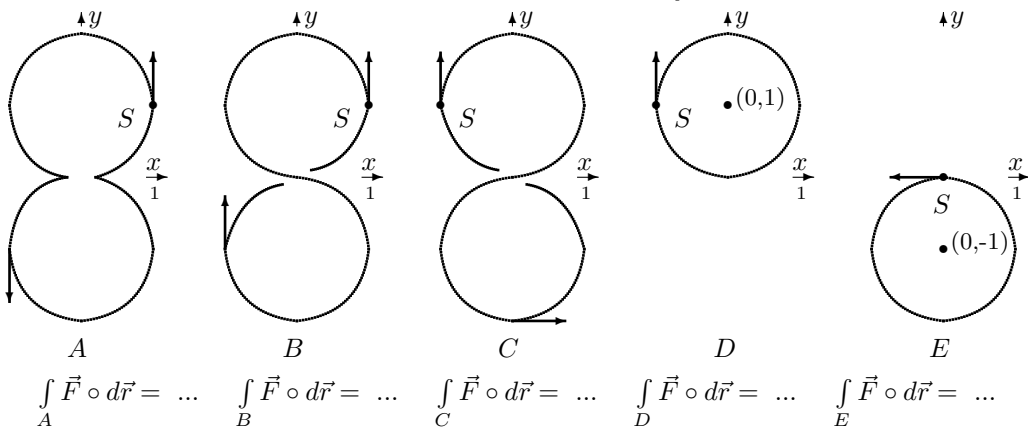
4. Oblicz $\oint_{x^2+5y^2=17} x^{21} e^{22y} dx + x^{22} e^{22y} dy$ b) $\oint_{x^2+y^6=1} e^{(x+y)^7} dx + e^{(x+y)^7} dy$

5. Przemieszczenie masy w polu sił $\vec{F} = [2y, x+y^2]$ od punktu $A(1,1)$ do $B(0,0)$ wymaga energii. Mniejsza będzie wzdłuż a) linii $y=x^2$, czy wzdłuż b) odcinka AB ?

5*. Czy można to rozstrzygnąć bez liczenia dwóch całek?

6. Okręgi D, E i ich sumy A, B, C są skierowane od S do S , jak pokazano poniżej.

Pole $\vec{F} = (P,Q)$ określone na $\mathbb{R}^2$ jest takie, że $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y + 6 + x^9$. Oblicz:



7. Niech $K = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$, $M = \{(x,y) : y = |x| - 1, x \in [-1,1]\}$, $L = [-1,1] \times \{0\}$, oznaczając krzywe skierowane od $(1,0)$ do $(-1,0)$.

Oblicz $\int_K P dx + Q dy$ i $\int_M P dx + Q dy$ wiedząc, że:

a) $Q'_x - P'_y = 6$ i $\int_L P dx + Q dy = 2$ b) $Q'_x - P'_y = x^{17}$ i $\int_L P dx + Q dy = \sqrt{2}$

8. Oblicz $\int_{\Gamma} (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}) \circ d\vec{r}$, gdy Γ jest brzegiem Ω skierowanym dodatnio i:

a) $\Omega = [3,9] \times [-4,4]$ b) $\Omega = \{(x,y) : (x-6)^2 + y^2 \leq 5^2\}$

c') $\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 5^2\}$ Dlaczego nie można wprost stosować tw. Greena?

d*) $\Omega = [-3,3] \times [-4,4]$ WSK. Użyj c) i (sprytnie) tw. Greena.

(P)ODPOWIEDZI do niektórych zadań z listy 14.

1. a) $\frac{27}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{9}{2}$ d) -16π 2. a) $2\pi - 2$ b) $e^s + st^2 + t^2 - 2$ c) 33

3. a) π a') 2 c) 9 c') 0 5. $\frac{5}{3} < \frac{11}{6}$ 6. A) 12 B) 2π 7. a) $\int_M \dots = 1$ 8. c') 2π

ŚCIAGA. Poniżej podane są różne (typowe) oznaczenia:

- pole wektorowe: $\vec{F}$, $\vec{F}(x,y)$, (P,Q) , $(P(x,y), Q(x,y))$
- parametryzacja krzywej Γ : $\vec{r}$, $\vec{r}(t)$, $(x(t), y(t))$, (x_t, y_t) , (x, y) ,
- całka skierowana: $\int_{\Gamma} \vec{F} \circ d\vec{r}$, $\int_{\Gamma} (P,Q) \circ d\vec{r}$, $\int_{\Gamma} P dx + Q dy$, $\int_{\Gamma} P(x,y) dx + Q(x,y) dy$.

Tw. Gdy $\vec{r} : [a,b] \rightarrow \Gamma$, $\vec{r} = (x(t), y(t))$ jest gładką parametryzacją łuku Γ , to

$$\int_{\Gamma} P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \int_a^b P(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt} dt.$$

Tw. Gdy $\vec{F} = \text{grad } f$ i $\vec{r} : [a,b] \rightarrow \Gamma$ jest gładką parametryzacją łuku Γ , to

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \circ d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)).$$

TWIERDZENIE GREENA. Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie obszarem 'bez dziur' ograniczonym krzywą Γ kawałkami gładką, skierowaną dodatnio. Niech pole wektorowe $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ będzie klasy C^1 na Ω . Wtedy

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} d\omega \quad [\text{wersja rot}],$$

$$\int_{\Gamma} -Q dx + P dy = \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} d\omega \quad [\text{wersja div}].$$