

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. LISTA 15.

1. Oblicz pole powierzchni części wspólnej stożków Λ_1, Λ_2 ($H=R=1$), które 'stoja' na płaszczyźnie $z=0$ i których środki podstaw są w odległości 1.

2. Oblicz pole powierzchni części wspólnej dwóch kul o promieniach R .

3. Oblicz objętość bryły V_k , gdy: WSK. $|V|_{obj} = \iiint_{V_k} 1 dV = \int_0^3 \left(\iint_{???} 1 d\omega \right) dz$

a^k) $V_k = \{(x, y, z) : x, y \in [0, (\frac{z}{3})^k], z \in [0, 3]\}$, dla $k=4$ WSK. dla $k \in \{0, 1, 2\}$

b^k) $V_k = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq (\frac{z}{3})^k, z \in [0, 3]\}$ dla $k \in \{0, 2, 1\}$

c^k) $V_k = \{(x, y, z) : (x - \cos(\frac{z}{3}2\pi))^2 + (y - \sin(\frac{z}{3}2\pi))^2 \leq (\frac{z}{3})^k, z \in [0, 3]\}$, dla $k=0, 2$

4. Niech $V = \{(x, y, z) : (x - \frac{z}{3})^2 + y^2 \leq (\frac{z}{3})^2, z \in [0, 3]\}$ (pochyły stożek).

Uzasadnij, że płaszczyzna $z=3x$ dzieli V na bryły o równych objętościach.

Czy tę własność ma każda płaszczyzna zawierająca punkty $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 3)$?

* * *

5^k (kliny). Płaszczyzna $z=x$ rozciąga U_k na dwie części; mniejszą oznaczmy V_k dla

$$U_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}, \quad U_2 = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Wyznacz: (tj. zapisz jako całkę iterowaną lub sumę całek iterowanych):

a) objętość V_k b) pole pow. V_k c) łączną długość 'krawędzi' V_k

d) masę V_k , gdy gęstość jest sześcianiem odl. od osi OX d') od pł. $x = \frac{1}{2}$

e) energię kinetyczną V_k kręcącego się wokół osi $x = \frac{1}{2}, y = 0$ w stałym tempie siedmiu obrotów na sekundę, gdy gęstość jest sześcianiem odległości od osi OX .

6^k. Powtórz zad.5^k, gdy zamiast $z=x$ weźmiemy płaszczyznę $x = \frac{1}{3}$.

* * *

7. Dla jakich p (z podanego zbioru) zbieżna jest całka niewłaściwa (i ile jest równa):

a) $\int_D \frac{y}{x} d\omega, D : \{(x, y) : 0 \leq y \leq x^p, 0 < x \leq 1\}$, dla $p \in \{1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, 0\}$

b) $\iint_{||(x,y)|| \leq 1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^{2p}}} d\omega$, dla $p > 0$ c) $\iint_{||(x,y)|| \geq 1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^{2p}}} d\omega$, dla $p > 0$

d) $\iint_{||(x,y)|| < p} \frac{1}{\sqrt{p^2 - x^2 - y^2}} d\omega$, dla $p > 0$

* * *

POWTÓRKA. Drzewiej bywało (na egzaminach). Oczywiście były też całki.

P₀. Niech $f(x, y) = \sin(x^2 + y^3)$, $g(x, y) = \sin(x^2 \cdot y^3)$, $h(x, y) = x^4 \cdot |y|$. Podaj:

a) $f''_{xy}(x, y) =$ b) $g''_{xy}(x, y) =$ c) dziedzinę h'_x d) dziedzinę h'_y

P₁. Zbadaj istnienie granicy funkcji f, g, h w punkcie $p_0 = (0, 0)$, gdzie

$$f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}, \quad h(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^4 + y^4}. \text{ Uzasadnij odpowiedź.}$$

P₂. Niech l oznacza prostą w przestrzeni opisaną równaniem $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 0$. Płaszczyzny styczne do powierzchni $z+xy = x^3+y$ w punktach $(0, 1, 1)$, $(-1, -2, -5)$ wycinają z prostej l odcinek. Znajdź jego długość.

P₃. Linie: $x^2 + 2y^2 = 3$ i $y^5 + 3xy^2 + 2x^3 = 4$ przecinają się w punkcie $(1, -1)$. Pod jakim kątem?

P₄. Znajdź wszystkie punkty, w których ciągła jest funkcja:

$$f(x, y) = \begin{cases} (e^{x^2 y^3} - 1)x^{-2} & \text{dla } x \neq 0 \\ 2y^3 - 5y^2 + 6y & \text{dla } x = 0 \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} (e^{x^3 y^2} - 1)x^{-3} & \text{dla } x \neq 0 \\ 2y^3 + y^2 - 6y & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

P₅. Dla funkcji $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ określonej na $D = [-2, 3] \times [-1, 4]$ podaj wszystkie punkty, w których f osiąga **maksima lokalne**, gdy $f(x, y)$ zadana jest wzorem

a) $x^2 - y^3$ b) $x^2 - y^2$ c) $x^2 y^2$ d) $(x + y)^2$

P₆. Wyznacz wartość największą i najmniejszą f-cji $f(x, y) = x^2 + 2x - 8 - y^2 + 4y$ określonej na $[-3, 3]^2$. Podaj wszystkie punkty, w których te wartości są przyjmowane.

P₇. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x, y) = 3x + 4y + 5(x^2 + y^2)$ na zbiorze $Z = \{(x, y) : x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 = x^2 + y^2\}$. Wyznacz wszystkie punkty, w których te wartości są przyjmowane.

P₈. Znajdź kres górny i kres dolny wartości funkcji f przy podanych warunkach i znajdź wszystkie argumenty, w których te kresy są przyjmowane, gdy:

a) $f(x, y) = x^2 y$ gdy $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$.

b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ gdy $x^2 + y^2 = z$ i $x + y = 1$.

P₉. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą (o ile istnieją) funkcji $f(x, y) = |x^2 + y^2 - 25| + 3x + 4y$ na zbiorze $W = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 10^2\}$. Wyznacz wszystkie punkty, w których te wartości są przyjmowane.

P₁₀. Znajdź równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni

$$x^3 y + y^3 z^4 = 7 + x + y + z \quad \text{w punkcie } A = (2, 1, -1).$$

Znajdź punkty przecięcia tej płaszczyzny z osiami układu współrzędnych.

Odp.: $z = \frac{11}{5}x + 2y - \frac{37}{5}$, przecięcia z osiami: $(0, 0, -\frac{37}{5})$, $(\frac{37}{11}, 0, 0)$, $(0, \frac{37}{10}, 0)$.