

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. LISTA 3.

0. Niech $f(x, y) = \frac{x}{y}$. Podaj przykład ciągu $a_n = (x_n, y_n)$ zbieżnego do $(0, 0)$ takiego, że $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ jest równa a) 0 b) $-\pi$ c) $+\infty$. Powtórz dla $f(x, y) = \frac{x^2}{y^3}$.

* * *

1. Zbadaj istnienie następujących granic, oblicz wartość, jeśli granica istnieje

a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$ c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ d) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin x}{y}$ f) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3^+ \\ y \rightarrow 4^+}} \frac{\ln y - \ln 4}{x - 3}$ g) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 4}} \frac{e^{(x-3)^2 + (y-4)^2} - 1}{(x-3)^2 + (y-4)^2}$

h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{y-x^2}$ i) $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y > 0}} e^{y/x^2}$ j) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^4 + y^4}$ k) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^4}$

l) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$ m) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^4}{x^4 + y^6}$ n) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy \sin(x)}{x^2 + y^2}$ o) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}$

2. Znajdź zbiór takich $p \geq 0$, że podana funkcja $f(x, y)$ ma granicę w $(0, 0)$

a) $\frac{|x|^p y^2}{x^2 + y^2}$ b) $\frac{\sin(x^4 |y|^p)}{x^4 + y^4}$ c) $\frac{\ln(1 + x^4 y^6)}{x^4 |y|^p}$ d) $\frac{|x|^p y^2}{x^2 + y^4}$ e*) $\frac{|x|^p y^2}{x^8 + y^{20}}$

3. Znajdź zbiór punktów ciągłości funkcji f , gdy

a) $f(x, y) = y \cdot \operatorname{sgn} x$ b) $f(x, y) = \operatorname{sgn}(x + y)$ c) $f(x, y) = [x] + [y - 0, 1]$

d) $f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y^2 & \text{dla } x \geq y \\ x - y & \text{dla } x < y \end{cases}$ e) $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{dla } x^2 + y^2 \geq 1 \\ x + y & \text{dla } x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$

f) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y^3)}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ y - 2y^2 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ g) $g(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y^3)}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ y - 2y^2 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

h) $h(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{xy^2} - 1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 5y - 4 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ i) $h(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2 y} - 1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ y^2 - 7 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

4. W zależności od wartości parametru p , podaj zbiór punktów ciągłości funkcji f leżących na brzegu kwadratu $[0, 1]^2$, czyli w zbiorze $W = [0, 1]^2 \setminus (0, 1)^2$.

a) $f(x, y) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } (x, y) \in [0, 1]^2 \\ p & \text{dla } (x, y) \notin [0, 1]^2 \end{cases}$ b) $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{dla } (x, y) \in [0, 1]^2 \\ p & \text{dla } (x, y) \notin [0, 1]^2 \end{cases}$