Analiza matematyczna 3. Lista 4.

0. Oblicz gradient funkcji **a)** $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^4}$ **z)** $f(x,y,z)=(x^2+y^4)z$

1. Oblicz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu; wskaż ich dziedziny.

a) $f(x,y,z)=\arctan(x^2y^3z^4)$ **b)** $z=|x|\cdot y$ **c)** $f(x,y)=\begin{cases} 3x & \text{dla } x^2\le y \\ y & \text{dla } x^2>y\end{cases}$

2. Oblicz pochodną kierunkową funkcji. (Doprecyzuj (jakoś) niedoprecyzowane zadania.)

a) $f(x,y)=x^2y^4$ w punkcie $(2,-1)$ w kierunku wektora $\frac{1}{13}(12,5)$

b) $f(x,y)=2xy+x^3y^2$, w kierunku $(1,-2)$ **c)** $f(x,y)=x(x+y)^3$, $(3,4)$

* * *

3. Niech $f(x,y)=|xy|x^2$.

Czy istnieje: **a)** $f'_x(0,-2)$ **b)** $f'_y(0,-2)$ **c)** $f'_x(-3,0)$ **d)** $f'_y(-3,0)$

4. Podaj zbiór tych wszystkich punktów dziedziny funkcji f, w których:

a) nie istnieje f'_x **b)** nie istnieje f'_y **c)** f nie jest ciągła,

gdy $f(x,y)=\begin{cases} x & \text{dla } (x,y)\in[0,1)\times[0,1] \\ y & \text{dla } (x,y)\notin[0,1)\times[0,1]\end{cases}$. Powtórz dla $f(x,y)=\begin{cases} x+y & \text{dla } xy\ge 0 \\ x+y^2 & \text{dla } xy<0\end{cases}$

5. Zbadaj ciągłość pochodnych cząstkowych w $(0,0)$ funkcji określonej wzorem: $f(0,0)=0$ i dla $(x,y)\neq(0,0)$

a) $f(x,y)=\dfrac{x\cdot y}{x^2+y^2}$ **b)** $f(x,y)=\dfrac{x\cdot y^2}{x^2+y^2}$ **c)** $f(x,y)=\dfrac{x^2\cdot y^2}{x^2+y^2}$

* * *

6. W podanym punkcie znajdź równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni

a) $z=(2+x-y)^2$, $(3,-1,36)$ **b)** $z=4x^2+y^2$, $(2,1,17)$

c) $zy+z=x+2$, $(2,3,1)$ **d)** $xyz=1$, $(\dfrac{1}{2},-2,-1)$

e) $\sin(xy)=2-z^2$, $(\pi,\frac{1}{2},-1)$ **f*)** $(x+y-1)(x+y+1)=2xy$, $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},2)$

7. Udowodnij, że płaszczyzny styczne do powierzchni $x^2+y^2+z^2=16$ i $z^2=x^2+y^2$ w punkcie $(2,2,2\sqrt{2})$ są prostopadłe.

8. Znajdź długość odcinka prostej $x=2, y=3$ zawartego między powierzchnią $z=x^2+y^2$ i płaszczyzną styczną do niej w punkcie $(1,1,2)$.

.

Ściąga

Niech $f:D\to\mathbb{R}$, gdzie $D\subseteq\mathbb{R}^2$. Pochodne cząstkowe f w punkcie $(x_0,y_0)\in D$ określamy wzorami:

$$f'_x(x_0,y_0)\stackrel{\text{def}}{=}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x},\quad f'_y(x_0,y_0)\stackrel{\text{def}}{=}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

Niech $f:D\to\mathbb{R}$ i $(x_0,y_0)\in D\subseteq\mathbb{R}^2$. Dla wektora $\vec{v}=[v_x,v_y]$, $||\vec{v}||=1$ określamy *pochodną kierunkową f w punkcie (x_0,y_0) w kierunku wektora $\vec{v}$* wzorem

$$f'_{\vec{v}}(x_0,y_0)\stackrel{\text{def}}{=}\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cdot v_x,y_0+t\cdot v_y)-f(x_0,y_0)}{t}.$$

Niech $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ma ciągłe pochodne cząstkowe w pewnym otoczeniu p-ktu (x_0,y_0).

Równanie $z=f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$

określa *płaszczyznę styczną* do f w punkcie (x_0,y_0).