Analiza matematyczna 3. Lista 6. na konwersatorium 12.11.2025

1. Znajdź ekstrema lokalne funkcji **a)** $f(x,y) = x + y - 4x^2y^2$

b) $f(x,y) = e^{xy} - x$ **c)** $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy$ **d)** $f(x,y) = x^3 - y^3 + xy$

e) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$ **f)** $f(x,y) = x^3 - x + y^2$

g) $f(x,y) = 5 - |x| - |y|$ **g')** $f(x,y) = |5 - |x| - |y||$

g") $f(x,y) = \left(5 - x^2 - y^2\right)^2$ **g"')** $f(x,y) = \left(5 - x^2 - y^2\right)^3$

h) $f(x,y) = |5-|x||$ **h')** $f(x,y) = y^2+|5-|x||$ **h")** $f(x,y) = y^3+|5-|x||$

Wsk. Począwszy od g) nie warto używać algorytmu (z hesjanem).

2. Podaj, w zależności od wartości parametru p, zbiór $E_{\min}$ (i $E_{\max}$) wszystkich punktów, w których f ma lokalne minimum (lokalne maksimum), gdy:

a) $f(x,y) = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$ **b)** $f(x,y) = \sqrt{(|x|-p)^2 + y^2}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 & \text{gdy } x^2 + y^2 > 1 \\ p - x^2 - y^2 & \text{gdy } x^2 + y^2 \le 1 \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} 4x & \text{gdy } (x,y) \in [0,1)^2 \\ p & \text{gdy } (x,y) \notin [0,1)^2 \end{cases}$ **e)** $f(x,y) = \{x+y\}$, $D_f = (-2,2]^2$

3. Znajdź ekstrema lokalne funkcji **a)** $f(x,y,z) = xyz(4-x-y-z)$, $D_f = \mathbb{R}_+^3$

b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - x - yz$ **c)** $f(x,y,z) = x(1-x) - y^2 + z(1-z)$

d) $f(x,y,z) = x^2 - x^4 + y^4 - y^8 + z^6 - z^{12}$ **e)** $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2-3)^2 - 1$

f) Dlaczego w e) Wolfram mówi, że nie znajduje minimów lokalnych?

* * *

Odpowiedzi do niektórych zadań (wg Wolframa):

1 lok. ekstr. w: **a)** brak **b)** brak **c)** $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$, max. **d)** $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$, min.

1 lok. ekstr. w: **e)** $(-1,1)$, min. **f)** $(3^{-1/2}, 0)$, min.

3 lok. ekstr. w: **a)** $(1,1,1)$, max. **b)** $(\frac{1}{2}, 0, 0)$, min. **c)** $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, max.

3d) $(0,0,0)$, min. oraz max. w 8 punktach (a,b,c), gdzie $a^2 = b^4 = c^6 = \frac{1}{2}$