

1. Wyznacz wartość najmniejszą i największą funkcji przy podanych warunkach.

a) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2y - 3$

Rozwiązanie. Ponieważ $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2y - 3 = 2x^2 + (y + 1)^2 - 4$, więc
 $\inf_{\mathbb{R}^2} f = 2 \cdot 0^2 + 0^2 - 4 = f(0, -1) = -4$ oraz $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$, bo $f(n, 0) = 2n^2 - 3 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

a'') $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2y - 3$ gdy $x^2 + y^2 \leq 4$

Rozwiązanie. Niech $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ i $W = \{(x, y) : g(x, y) \leq 0\}$.

0°. W jest kołem, czyli zbiorem ograniczonym i domkniętym, więc z tw. Weierstrassa f osiąga kresy na W .

1°. Punkty kryt. we wnętrzu W :

$$\begin{cases} 4x = 0 \\ 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{i ten punkt } p_1 = (0, -1) \text{ leży w wnętrzu koła } W.$$

2°. Punkty kryt. na brzegu W (tu $\nabla g = [2x, 2y] \neq \vec{0}$, więc stosujemy mnożn. L.):

$$\begin{cases} 4x = \lambda \cdot 2x \\ 2y + 2 = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0^2 + y^2 = 4 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} \lambda = 2 \\ 2y + 2 = 2 \cdot 2y \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} y = 1 \\ x = \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

Stąd na brzegu W są 4 p. kryt.: $p_2 = (0, 2)$, $p_3 = (0, -2)$, $p_4 = (\sqrt{3}, 1)$, $p_5 = (-\sqrt{3}, 1)$.

3°. Z $0^\circ, 1^\circ, 2^\circ$, wśród wartości f w 5 p. kryt. znajdziemy w. najw. i najmniejszą:

$$f(0, -1) = -4, \quad f(0, 2) = 5, \quad f(0, -2) = -3, \quad f(\sqrt{3}, 1) = 6, \quad f(-\sqrt{3}, 1) = 6$$

$$\inf_{\parallel} f[W] = -4, \quad \sup_{\parallel} f[W] = 6$$

b) $f(x, y) = x^3 + x^2 + y^2/3$ gdy $x^2 + y^2 \leq 36$

WSK.: Punkty krytyczne na okręgu: $(\pm 6, 0)$, $(0, \pm 6)$, $(-\frac{4}{9}, \pm \frac{10\sqrt{29}}{9})$.

d) $f(x, y) = 16 - x^2 - 4y^2$ gdy $x^4 + 2y^4 \leq 1$

WSK.: Punkty krytyczne na brzegu: $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm \frac{1}{2^{1/4}})$, $(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$, $(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$.

e) $f(x, y) = xy$ gdy $x^2 + y^2 = 32$

Rozwiązanie. Warunek opisuje okrąg $W = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 32 = 0\}$, czyli zbiór ograniczony i domknięty, więc z tw. Weierstrassa $f|_W$ osiąga swe kresy. Wnętrze W jest puste. Gradient warunku $[2x, 2y] \neq \vec{0}$ na W , więc zastosujemy mnożniki L.:

$$\begin{cases} y = \lambda \cdot 2x \\ x = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 0^2 + 0^2 = 32 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} \lambda = \frac{y}{2x} \\ x = \frac{y}{2x} \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ 2x^2 = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \pm 4 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = -4 \\ y = \pm 4 \end{cases}$$

Stąd mamy cztery p.kryt.: $(4, 4)$, $(4, -4)$, $(-4, 4)$, $(-4, -4)$.

ODP.: $\inf f[W] = -16 = f(4, -4) = f(-4, 4)$, $\sup f[W] = 16 = f(4, 4) = f(-4, -4)$.

f) $f(x, y) = 4x^2 + y^3 + 3y + 7$ gdy $2x^2 + \frac{3}{2}y^2 = \frac{3}{2}$
 ODP. $\inf\{f(x, y) : 2x^2 + \frac{3}{2}y^2 = \frac{3}{2}\} = -4 = f(0, -1),$
 $\sup\{f(x, y) : 2x^2 + \frac{3}{2}y^2 = \frac{3}{2}\} = 4 = f(0, 1).$

g'') Wsk. badać najpierw funkcję $\hat{f}(x, y) = x^2 + y^4$. $\inf f|_{x^2+y^3=1} = f(\pm\frac{\sqrt{37}}{8}, \frac{3}{4})$

h) $f(x, y) = x^2 + (y+1)^2 + 3$ gdy $x^2 + y^2 = \pi$

Rozwiązanie. Dla punktów okręgu mamy: $f(x, y) = x^2 + (y+1)^2 + 3 = 2y + 4 + \pi$ i $-\sqrt{\pi} \leq y \leq \sqrt{\pi}$, więc $\inf_{x^2+y^2=\pi} f = -2\sqrt{\pi} + 4 + \pi = f(0, -\sqrt{\pi}), \sup_{x^2+y^2=\pi} f = 2\sqrt{\pi} + 4 + \pi = f(0, \sqrt{\pi}).$

2. Wyznacz wartość najmniejszą i największą funkcji przy podanych warunkach.

a) $f(x, y, z) = x + y + 3z$ gdy $x^2 + y^2 = 1$ i $x - y + z = 1$

Wsk. p. kryt. $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}}), (\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}})$

a'') $f(x, y, z) = x + y + 3z$ gdy $x^2 + y^2 = z^2$ i $x - y + z = 1$

Wsk. p. kryt. $(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (2, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$

c) $f(x, y, z) = xyz$ gdy $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$

Rozwiązanie. Warunki opisują okrąg W (przecięcie sfery i płaszczyzny), czyli zbiór zwarty, więc z tw. Weierstrassa $f|_W$ osiąga swe kresy. Gradienty warunków: $[2x, 2y, 2z], [1, 1, 1]$ są liniowo zależne tylko gdy $x = y = z$, a takich punktów nie ma w W . Zatem można użyć metody mnożników Lagrange'a:

$$\begin{cases} yz = \lambda 2x + \mu \\ xz = \lambda 2y + \mu \\ xy = \lambda 2z + \mu \\ x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z(x-y) = \lambda 2(y-x) \\ x(y-z) = \lambda 2(z-y) \\ x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ x+x+z=0 \\ 2x^2+(-2x)^2=1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} \lambda = -\frac{z}{2} \\ x(y-z) = (-\frac{z}{2})2(z-y) \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{cases} x=y \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \\ z = -2x \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} y=z \\ \dots \\ \dots \end{cases} \right), \text{ czyli mamy 6 p. krytycznych, dla których:}$$

$$f(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}) = f(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) = f(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) = -\frac{2}{6\sqrt{6}} = \inf_W f,$$

$$f(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}) = f(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}) = \frac{2}{6\sqrt{6}} = \sup_W f.$$

c') $f(x, y, z) = xyz$ gdy $xy + yz + xz = -\frac{1}{2}, x + y + z = 0$

Rozwiązanie. Ponieważ $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz)$, więc $\text{zad.c}' = \text{zad.c.}$

$$\text{e)} \quad f(x, y, z) = y^3 + xz^2 \quad \text{gd}y \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Rozwiązanie. Warunek opisuje sferę W , czyli zbiór ograniczony i domknięty, więc z tw. Weierstrassa f osiąga kresy na W w pewnych punktach spełniających układ:

$$\begin{cases} z^2 = \lambda 2x \\ 3y^2 = \lambda 2y \\ 2xz = \lambda 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad \text{analizując} \quad \text{II i III równ.} \quad \left(\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \text{ lub } x = \lambda \\ \dots \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{3}{2}y \\ z = 0 \text{ lub } x = \frac{3}{2}y \\ \dots \end{cases} \right)$$

$$\left(\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z^2 = 2x^2 \\ 3x^2 = 1 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{3}{2}y \\ z = 0 \\ 0^2 = 3yx \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{3}{2}y \\ x = \frac{3}{2}y \\ z^2 = \frac{3}{2}y \cdot 2(\frac{3}{2}y) \\ \frac{9}{4}y^2 + y^2 + \frac{9}{2}y^2 = 1 \end{cases} \right) \text{ skąd}$$

$$\left(\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ x = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{31}} \\ z = \pm \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{31}} \\ y = \frac{2}{\sqrt{31}} \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x = \frac{-3}{\sqrt{31}} \\ z = \pm \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{31}} \\ y = \frac{-2}{\sqrt{31}} \end{cases} \right)$$

Dalej wystarczy porównać wartości f w tych 12 punktach. Mamy:

$$f(\pm 1, 0, 0) = 0, \quad \left| f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \right| = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} < 1, \quad f(0, \pm 1, 0) = \pm 1,$$

$$\left| f\left(\frac{-3}{\sqrt{31}}, \frac{-2}{\sqrt{31}}, \pm \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{31}}\right) \right| = f\left(\frac{3}{\sqrt{31}}, \frac{2}{\sqrt{31}}, \pm \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{31}}\right) = \frac{8}{31\sqrt{31}} + \frac{3}{\sqrt{31}} \cdot \frac{18}{31} = \frac{2}{\sqrt{31}} < 1.$$

Zatem $\inf_W f = -1 = f(0, -1, 0)$ i $\sup_W f = 1 = f(0, 1, 0)$.