

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. LISTA 9.

Niektóre podpunkty można rozwiązać 'chyttrze'. (P)odpowiedzi są na następnych stronach.

1. Czy podane równanie określa jednoznacznie funkcję uwikłaną $y = y(x)$ w pewnym otoczeniu podanego punktu? Znajdź równanie stycznej w tym punkcie.

a) $x^4y + xy^3 = 10$, $A = (1, 2)$ **b)** $x^y = y^x$, $A = (2, 4)$; $B = (3, 3)$; $C = (2, 5)$

c) $x^2 + y^2 = 2xy$, $A = (1, 1)$; $B = (0, 0)$ **d)** $x^4 + y^4 = 2x^2y^2$, $A = (1, 1)$; $B = (0, 0)$

e) $x^2 + y^2 = 2x$, $A = (1, 1)$; $B = (0, 0)$ **f)** $x^2 + y^2 - x = 2xy$, $A = (1, 0)$; $B = (0, 0)$

g) $x^3 - y^3 + x - y = 0$, $A = (p, p)$ **h*)** $x^4 + y^4 = 2xy$, $A = (1, 1)$; $B = (0, 0)$

i') $x^3 + y^2 = 9$, $A = (2, 1)$ **i'')** $x^6 + y^4 + 81 + 2x^3y^2 = 18(x^3 + y^2)$, $A = (2, 1)$

2. Dla zadanej równaniem powierzchni znajdź równanie płaszczyzny stycznej do niej w podanym punkcie.

a) $x^2z + yz^2 - 2 = 0$, $A = (\sqrt{2}, 0, 1)$ **b)** $e^{xz} = yz$, $A = (0, 1, 1)$; $B = (1, e, 1)$

c) $x^2 + y^3 + z^4 = x + z$, $A = (0, 0, 0)$; $B = (1, 0, 0)$; $C = (1, 0, 1)$

3. Oblicz pochodną dy/dx i drugą pochodną d^2y/dx^2 funkcji uwikłanej $y = y(x)$

a) $xe^y - y + 1 = 0$ **b)** $x^2 + y^2 = 3xy$ **c)** $x - y + e^x - e^y = 0$

4. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji uwikłanej $y = y(x)$ zadanej równaniem:

a) $x^2 + y^2 + 4y = xy + 2x$ **b)** $x^3 + y^3 = 12xy$ **c*)** $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$

5. Wiedząc, że linia $B = \{(x, y) : x^4 + y^4 = 9xy\}$ wygląda jak przekręcona nieco ósemka, znajdź najmniejsze takie a , że $B \subseteq [-a, a]^2$.

(P)ODPOWIEDZI do niektórych zadań z listy 9.

1. b) styczne: $y = -4 \frac{1-\ln 2}{2\ln 2-1}(x-2) + 4$, $y = x$ w punktach A , B (odpowiednio)

1. f) styczne: $2y + 1 = x$, $x = 0$ w punktach A , B (odpowiednio)

1. h) W B , dla $t \in (0, 1]$ i dla $t \in [1, +\infty)$ rozważ linie: $p_t = \left(\sqrt{\frac{2t}{1+t^4}}, t \cdot \sqrt{\frac{2t}{1+t^4}} \right)$.

Jak leżą względem prostej $y = x$? Oblicz $\lim_{t \rightarrow +\infty} p_t$ i $\lim_{t \rightarrow 0^+} p_t$.

2. b) płaszczyzna(!) $y = ex$ jest styczna do powierzchni $e^{xz} = yz$ w punkcie $(1, e, 1)$

4 a) Odp. maks. lok. w $\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{2}{3}(2\sqrt{3}-3)\right)$ i min. lok. w $\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{2}{3}(2\sqrt{3}+3)\right)$

4 b) Odp. maks. lok. w $(4\sqrt[3]{3}, 4\sqrt[3]{9})$

4 c) ROZWIĄZANIE

Funkcja $F = \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ jest określona dla $x \neq 0$ (poza osią OY).

Mamy: $F'_x = \frac{x+y}{x^2+y^2}$, $F'_y = \frac{y-x}{x^2+y^2}$ i $F''_{xx} = \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $F''_{yy} = \frac{x^2-y^2+2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

Szukamy p. kryt:

$$\begin{cases} -\frac{F'_x}{F'_y} = 0 \\ F = 0 \\ F'_y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F'_x = 0 \\ F = 0 \\ F'_y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ \ln(\sqrt{2}|x|) = -\frac{\pi}{4} \\ y \neq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ |x| = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\pi/4} \\ y \neq x \end{cases}$$

czyli mamy dwa punkty: $p_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}e^{\pi/4}}, -\frac{1}{\sqrt{2}e^{\pi/4}}\right)$, $p_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\pi/4}}, \frac{1}{\sqrt{2}e^{\pi/4}}\right)$.

Dla nich $F''_{xx} = \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} > 0$, więc znak $-\frac{F''_{xx}}{F'_y}$ rozstrzyga jakie są w nich ekstrema: w p_1 min. lokalne, w p_2 maks. lokalne.

[Niestety, to jeszcze nie koniec; to nie jest pełne rozwiązanie.]

Tw. o funkcji uwikłanej nie rozstrzyga, jak to jest z punktami spełniającymi układ

$$\begin{cases} F'_y = 0 \\ F = 0 \end{cases}, \text{ czyli z } q_1 = \left(\frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}}\right), q_2 = \left(-\frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}}, -\frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}}\right).$$

Dla nich $F'_x \neq 0$, więc z dualnej wersji tw. o f. uwikłanej wiemy, że leżą na wykresach f. uwikłanych $x = x(y)$, które mają w tych punktach styczne $x = \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}}$, $x = -\frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}}$.

Ponadto w nich $x''(y) \neq 0$ (bo $F''_{yy} = \frac{x^2-y^2+2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \neq 0$), więc ich **wykresy leżą lokalnie po jednej stronie swych stycznych.**

Stąd już wynika, że w q_1 i w q_2 równanie $F = 0$ nie zadaje funkcji uwikłanej $y = y(x)$.

ODP. Równanie $F = 0$ zadaje funkcję uwikłaną $y = y(x)$, która ma ekstrema lokalne:

minimum w $p_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}e^{\pi/4}}, -\frac{1}{\sqrt{2}e^{\pi/4}}\right)$ i maksimum w $p_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\pi/4}}, \frac{1}{\sqrt{2}e^{\pi/4}}\right)$. $\square$