

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. LISTA 2,5.(CIAGI)

c0. Podaj cztery wyrazy ciągu:

$$\textbf{a)} \quad a_n = \left(3 + \frac{1}{10^n}, \frac{n+1}{n}\right), \quad a_1 = (\dots, \dots), \quad a_2 = \dots, \quad a_3 = \dots, \quad a_4 = \dots$$

$$\textbf{b)} \quad b_k = (k, 1/k),$$

DEF. Niech ciąg (p_n) przyjmuje wartości w $\mathbb{R}^m$ i niech $g \in \mathbb{R}^m$.

Mówimy, że ciąg (p_n) jest zbieżny do g , gdy ciąg odległości $|a_n - g|$ jest zbieżny do 0, innymi słowy (czy raczej 'innymi krzaczkami'):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = g \stackrel{\text{def}}{\iff} \lim_{n \rightarrow \infty} |p_n - g| = 0.$$

DLACZEGO to ma sens; przecież $\lim$ jest tu definiowany przez $\lim$!?

Odpowiedź: ten $\lim$ po prawej stronie jest już znany (np. z AM1)!

Po prawej to nie jest wartość bezwzględna, ale **norma** w $\mathbb{R}^m$.

Gdy uwzględnimy (z AM1) definicję zbieżności ciągu wg Cauchy'ego mamy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = g \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists \dots \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad n \geq N \Rightarrow |p_n - \dots| < \varepsilon.$$

Dla $m = 2$, przy oznaczeniach: $p_n = (x_n, y_n)$, $g = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = g \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall \dots \geq N \quad \sqrt{\dots + \dots} < \varepsilon.$$

c1. Udowodnimy, że $g = (\dots, \dots, \dots)$ jest granicą ciągu $p_n = \left(\frac{4n+3}{2n+1}, \frac{5n}{6n^2+7}, \frac{8n}{n+9}\right)$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} |p_n - \dots| &= \left| \left(2 + \frac{\dots}{2n+1}, \frac{5n}{6n^2+7}, 8 - \frac{72}{n+\dots}\right) - \dots \right| = \\ &= \sqrt{\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{25n^2}{(6n^2+7)^2} + \frac{72^2}{(n+\dots)^2}} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{25n^2}{n^4} + \frac{72^2}{n^2}} = \frac{\sqrt{1+25+72^2}}{n} \leq \frac{72\sqrt{3}}{n} \end{aligned}$$

Stąd dla dowolnego $\varepsilon > 0$ dla każdego naturalnego $n \geq \frac{\dots}{\varepsilon}$ mamy $|p_n - g| < \varepsilon$. $\square$

Poniższe twierdzenie pozwala uniknąć takich szacowań, jak wyżej.

Tw. Ciąg $p_n = (x_n, y_n)$ jest zbieżny do $g = (x, y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny po osiach, tzn. $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = g \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$.

Dowód ($\Leftarrow$) wynika z AM1, z podstawowych twierdzeń o granicach sumy, iloczynu i pierwiastkach ciągów zbieżnych.

Dowód ($\Rightarrow$) wynika z poniższych nierówności i twierdzenia o trzech $\dots$.

$$0 \leq |x_n - x| \leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}, \quad 0 \leq |y_n - y| \leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}.$$

c2. Dzięki temu twierdzeniu, można (niemal) w pamięci obliczyć:

a) Dla $a_n = \left(\frac{\sin(n^2 + 2)}{n + 1}, \frac{2n + 3}{4n + 5} \right)$ mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = (\dots , \dots)$

b) Dla $b_n = \left(n \sin \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{n}{n + 1} \right)$ mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \dots\dots\dots$

c) Dla $c_n = \left(\frac{n + 1}{\sqrt{n + 2}}, \frac{\sqrt{n + 3}}{n + 4} \right)$ mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \dots\dots\dots$

c3. Niech $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ i niech $a_n = (x_n, y_n)$, gdzie $x_n = \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{n}$ i $y_n = \frac{1}{2n+3}$.

Wtedy granicą ciągu a_n jest para $(\dots, \dots)$, a granicą ciągu $f(a_n)$ jest liczba $\dots\dots$.

Podaj przykłady ciągów $b_n = (x'_n, y'_n)$ zbieżnych do $(0, 0)$ takich, że:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = 0$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = -\pi$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = +\infty$

cK. Karol Omyłek (jak to Karol) wypowiedział **błędne** zdania. Jakie to są błędy?

a) Każdy rosnący i ograniczony ciąg punktów płaszczyzny jest zbieżny.

b) Jeżeli ciąg (x_n) ma podciąg zbieżny do π i ciąg (y_n) ma podciąg zbieżny do e , to ciąg (a_n) zdefiniowany wzorem $a_n = (x_n, y_n)$, ma podciąg zbieżny do (π, e) .