

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. LISTA 3.

1. Zbadaj istnienie następujących granic, oblicz wartość, jeśli granica istnieje

$$\text{a)} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \quad \text{b)} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{c)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} \quad \text{d)} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$\text{e)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin x}{y} \quad \text{f)} \lim_{\substack{x \rightarrow 3^+ \\ y \rightarrow 4^+}} \frac{\ln y - \ln 4}{x - 3} \quad \text{g)} \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 4}} \frac{e^{(x-3)^2 + (y-4)^2} - 1}{(x-3)^2 + (y-4)^2}$$

$$\text{h)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{y-x^2} \quad \text{i)} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y > 0}} e^{y/x^2} \quad \text{j)} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^4 + y^4} \quad \text{k)} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^4}$$

$$\text{l)} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} \quad \text{m)} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^4}{x^4 + y^6} \quad \text{n)} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy \sin(x)}{x^2 + y^2} \quad \text{o)} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}$$

$$\text{p)} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^4 y}{x^4 + y^{10}} \quad \text{q)} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y^3}{x^4 + y^{10}} \quad \text{r)} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^4}{x^4 + y^{10}} \quad \text{s)} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^5}{x^4 + y^{10}}$$

2. Znajdź zbiór takich $p \geq 0$, że podana funkcja $f(x, y)$ ma granicę w $(0, 0)$

$$\text{a)} \frac{|x|^p y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{b)} \frac{\sin(x^4 |y|^p)}{x^4 + y^4} \quad \text{c)} \frac{\ln(1 + x^4 y^6)}{x^4 |y|^p} \quad \text{d)} \frac{|x|^p y^2}{x^2 + y^4} \quad \text{e*)} \frac{|x|^p y^2}{x^8 + y^{20}}$$

3. Znajdź zbiór punktów ciągłości funkcji f , gdy

$$\text{a)} f(x, y) = y \cdot \operatorname{sgn} x \quad \text{b)} f(x, y) = \operatorname{sgn}(x + y) \quad \text{c)} f(x, y) = [x] + [y - 0, 1]$$

$$\text{d)} f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y^2 & \text{dla } x \geq y \\ x - y & \text{dla } x < y \end{cases} \quad \text{e)} f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{dla } x^2 + y^2 \geq 1 \\ x + y & \text{dla } x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$$

$$\text{f)} f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y^3)}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ y - 2y^2 & \text{dla } x = 0 \end{cases} \quad \text{g)} g(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y^3)}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ y - 2y^2 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{h)} h(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{xy^2} - 1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 5y - 4 & \text{dla } x = 0 \end{cases} \quad \text{i)} h(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2 y} - 1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ y^2 - 7 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

4. W zależności od wartości parametru p , podaj zbiór punktów ciągłości funkcji f leżących na brzegu kwadratu $[0, 1]^2$, czyli w zbiorze $W = [0, 1]^2 \setminus (0, 1)^2$.

$$\text{a)} f(x, y) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } (x, y) \in [0, 1]^2 \\ p & \text{dla } (x, y) \notin [0, 1]^2 \end{cases} \quad \text{b)} f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{dla } (x, y) \in [0, 1]^2 \\ p & \text{dla } (x, y) \notin [0, 1]^2 \end{cases}$$

5. Dla jakich $p > 0$ istnieje granica $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{|x| \cdot |yz|^p}{x^2 + y^2 + z^2}$?