

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. LISTA 4.

0. Oblicz gradient funkcji **a)** $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^4}$ **z)** $f(x, y, z) = (x^2 + y^4)z$

1. Oblicz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu; wskaż ich dziedziny.

a) $f(x, y, z) = \arctan(x^2 y^3 z^4)$ **b)** $z = |x| \cdot y$ **c)** $f(x, y) = \begin{cases} 3x & \text{dla } x^2 \leq y \\ y & \text{dla } x^2 > y \end{cases}$

2. Oblicz pochodną kierunkową funkcji. (Doprecyzuj (jakoś) niedoprecyzowane zadania.)

a) $f(x, y) = x^2 y^4$ w punkcie $(2, -1)$ w kierunku wektora $\frac{1}{13}(12, 5)$
b) $f(x, y) = 2xy + x^3 y^2$, w kierunku $(1, -2)$ **c)** $f(x, y) = x(x + y)^3$, $(3, 4)$

* * *

3. Niech $f(x, y) = |xy|x^2$.

Czy istnieje: **a)** $f'_x(0, -2)$ **b)** $f'_y(0, -2)$ **c)** $f'_x(-3, 0)$ **d)** $f'_y(-3, 0)$

4. Podaj zbiór tych wszystkich punktów dziedziny funkcji f , w których:

a) nie istnieje f'_x **b)** nie istnieje f'_y **c)** f nie jest ciągła,

gdy $f(x, y) = \begin{cases} x & \text{dla } (x, y) \in [0, 1) \times [0, 1] \\ y & \text{dla } (x, y) \notin [0, 1) \times [0, 1] \end{cases}$. Powtórz dla $f(x, y) = \begin{cases} x+y & \text{dla } xy \geq 0 \\ x+y^2 & \text{dla } xy < 0 \end{cases}$

5. Zbadaj ciągłość pochodnych cząstkowych w $(0, 0)$ funkcji określonej wzorem: $f(0, 0) = 0$ i dla $(x, y) \neq (0, 0)$

a) $f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$ **b)** $f(x, y) = \frac{x \cdot y^2}{x^2 + y^2}$ **c)** $f(x, y) = \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2}$

* * *

6. W podanym punkcie znajdź równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni

a) $z = (2 + x - y)^2$, $(3, -1, 36)$ **b)** $z = 4x^2 + y^2$, $(2, 1, 17)$

c) $zy + z = x + 2$, $(2, 3, 1)$ **d)** $xyz = 1$, $(\frac{1}{2}, -2, -1)$

e) $\sin(xy) = 2 - z^2$, $(\pi, \frac{1}{2}, -1)$ **f*)** $(x + y - 1)(x + y + 1) = 2xy$, $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 2)$

7. Udowodnij, że płaszczyzny styczne do powierzchni $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ i $z^2 = x^2 + y^2$ w punkcie $(2, 2, 2\sqrt{2})$ są prostopadłe.

8. Znajdź długość odcinka prostej $x = 2, y = 3$ zawartego między powierzchnią $z = x^2 + y^2$ i płaszczyzną styczną do niej w punkcie $(1, 1, 2)$.

ŚCIAGA

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Pochodne cząstkowe f w punkcie $(x_0, y_0) \in D$ określamy wzorami:

$$f'_x(x_0, y_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}, \quad f'_y(x_0, y_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ i $(x_0, y_0) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$. Dla wektora $\vec{v} = [v_x, v_y]$, $||\vec{v}|| = 1$ określamy pochodną kierunkową f w punkcie (x_0, y_0) w kierunku wektora $\vec{v}$ wzorem

$$f'_{\vec{v}}(x_0, y_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cdot v_x, y_0 + t \cdot v_y) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ma ciągle pochodne cząstkowe w pewnym otoczeniu p-ktu (x_0, y_0) .

Równanie $z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$

określa *płaszczyznę styczną* do f w punkcie (x_0, y_0) .