Analiza matematyczna 3. Lista 5.

1. Oblicz pochodne cząstkowe rzędu drugiego; wskaż ich dziedziny.

a) $f(x,y,z)=e^{xyz}+x^2y^3z^4$ **b)** $z=|x|+y^3$ **c)** $f(x,y)=\frac{x^8y^8}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$

2. Oblicz wszystkie pochodne cząstkowe rzędu 7. funkcji $f(x,y,z)=e^{x+y+z}+xy^2z^3$.

3. Oblicz (wszystkie) pochodne cząstkowe rzędu 29 funkcji

a) $f(x,y)=x^{30}y^2+(x^3y^2+4)^2(y-x^3)^3$ **b)** $z=e^{2x+5y}$ **c)** $z=\sin(\pi x+ey)$

4. Oblicz pochodne rzędu pierwszego złożenia funkcji:

a) $z=2x^2-3y^3;\ x=\sqrt{t},\ y=e^{2t}$ **a$^\pm$)** $z=\operatorname{arctg}(y^2\pm x^2);\ x=\sin t,\ y=\cos t$

b) $z=\sin 2u\cos 3v;\ u=(r+s)^2,\ v=(r-s)^2$ **b')** $z=u^v;\ u=x^y,\ v=xy$

c) $w=\sqrt{x^2+y^2+z^2};\ x=e^t,\ y=e^{-t},\ z=2t$

d) $w=\frac{yz}{x^2+xy};\ x=u^2,\ y=v^2,\ z=u^2-v^2$

5. Udowodnij (doprecyzuj założenia o f):

a) Niech $f:\mathbb{R}^{\cdots}\to\mathbb{R}$ będzie ..... .

Jeśli $z=f(x-y)$, to $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ .....

b) Niech $f:\mathbb{R}^{\cdots}\to\mathbb{R}$ będzie ..... .

Jeśli $w=f(x-y,y-z,z-x)$, to $\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=$ .....

6. Znajdź wielomian stopnia ≤ 3 o wartościach pochodnych rzędu ≤ 3 w początku ukł. współrzędnych takich samych, jakie ma funkcja zadana wzorem:

a) $e^x\cos y$ **b)** $e^x\ln(1+y)$ **c)** e^{xy} **d)** $x^2e^{x^2y^3}$ **e)** $\cos(xyz)$

7. Wyznacz przybliżoną wartość (przybliżając pł.styczną). Oszacuj błąd w a), c).

a) $\sqrt{6{,}02^2+8{,}01^2}$ **b)** $\dfrac{8{,}04}{2{,}02}$ **c)** $1{,}02^{3{,}01}$ **d)** $\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03}+0{,}08^4\right)$

a') $\sqrt{5{,}98^2+8{,}01^2}$ **c')** $1{,}01^{3{,}02}$ **c")** $0{,}99^{3{,}05}$ **e)** $\sqrt[3]{5{,}99^2+2{,}03^6+4{,}97^2}$

* * *

Odpowiedzi do niektórych zadań (wg Wolframa):

6: $1+x+\frac{x^2-y^2}{2}+\frac{x^3-3xy^2}{6}$, $y+\frac{2yx-y^2}{2}+\frac{3yx^2-3y^2x+2y^3}{6}$, $1+xy$, x^2, 1

7a') 9,996, **7b)** 3,98, **7c')** 1,03, **7c")** 0,97, **7e)** 5,074.