Analiza matematyczna 3. Lista 7.

1. Znajdź kres górny i kres dolny wartości funkcji f na podanym zbiorze W i wszystkie argumenty, w których te kresy są przyjmowane, gdy f jest dana wzorem

a) $x^3+xy-3x$, W jest ograniczony liniami $y=x^2$, $2x=y-3$

b) $xy(4-x-y)$, $W=$ trójkąt o wierzchołkach $(1,0)$, $(6,0)$, $(1,5)$ **b$\dot{\text{z}}$)** $W=[-5,5]^2$

c) $2x^3+4x^2+y^2-2xy$, $W=\{(x,y): x^2\le y\le 4\}$ **c$\dot{\text{z}}$)** $W=\{(x,y): x^2\le y+2\le 9\}$

d) $|x|+(x+y)^2+y$, $W=\Delta(-1,0)(1,0)(0,1)$ **d$\dot{\text{z}}$)** $W=\{(x,y): |y|\le 1-|x|\}$

2. Znajdź $\sup f[D]$, $\inf f[D]$ i wszystkie argumenty z D, w których te kresy są przyjmowane, gdzie $D=\{(x,y): x+y\le 8 \ \wedge \ x,y>0\}$ i f jest dana wzorem

a) $2xy-x^2y-xy^2$ **b)** $2xy+x^2y+xy^2$ **c)** $\ln(x+2y)$ **d)** $\ln(1+6x+y)$

3. Znajdź wartość najmniejszą i wartość największą funkcji przy podanych warunkach oraz wszystkie argumenty, w których są przyjmowane. Tam, gdzie można zastosuj metodę czynników nieoznaczonych Lagrange'a. Czy można to zrobić prościej?

a) $f(x,y)=2x^2+y^2+2y-3$ **a')** gdy $x^2+y^2=4$ **a")** gdy $x^2+y^2\le 4$

b) $f(x,y)=x^3+x^2+y^2/3$ gdy $x^2+y^2\le 36$ **c)** $f(x,y)=xy$ gdy $2x^2+y^2\le 4$

d) $f(x,y)=16-x^2-4y^2$ gdy $x^4+2y^4\le 1$ **e)** $f(x,y)=xy$ gdy $x^2+y^2=32$

f) $f(x,y)=4x^2+y^3+3y$ gdy $2x^2+\frac{3}{2}y^2=\frac{3}{2}$ **f')** gdy $2x^2\cdot\frac{3}{2}y^2=\frac{3}{2}$

g) $f(x,y)=2^{x^2+y^4}$ gdy $x^2+y^2=1$ **g')** gdy $x^2+y^2=9$ **g")** gdy $x^2+y^3=1$

p) $f(x,y,z)=x+y+3z$ gdy $x^2+y^2=1$ i $x-y+z=1$

p') $f(x,y,z)=x+y+3z$ gdy $x^2+y^2=1$ i $x-y=1$

p") $f(x,y,z)=x+y+3z$ gdy $x^2+y^2=z^2$ i $x-y+z=1$

q) $f(x,y,z)=y^2+z^2$ gdy $x^2+y^2+z^2=1$ i $y+2z=1$

r) $f(x,y,z)=xyz$ gdy $x^2+y^2+z^2=1$, $x+y+z=0$

s*) $f(x,y,z)=xyz$ gdy $x+y+z=5$, $xy+xz+yz=8$

4. Wyznacz punkt płaszczyzny $z=0$, dla którego suma kwadratów odległości od punktów $A_1(5,2,1)$, $A_2(7,3,4)$, $A_3(-3,1,2)$ jest najmniejsza.

5. a) Znajdź trzy dodatnie liczby o sumie 18, których iloczyn jest największy.
b)** Znajdź dodatnie liczby o sumie 18, których iloczyn jest największy.

6. Niech $A(4,0,4)$, $B(4,4,4)$, $C(4,4,0)$. Na powierzchni $x^2+y^2+z^2=4$ znajdź taki punkt S, by objętość ostrosłupa $SABC$ była **a)** najmniejsza **b)** największa.

Uwaga. Podpunkty oznaczone wykładnikiem $\dot{\text{z}}$ są nie tyle trudne, co żmudne (nieco).

Odpowiedzi do niektórych zadań:

1a) $\inf\limits_W f=-\sqrt{2}=f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2})$, $\sup\limits_W f=45=f(3,9)$

1b) $\inf\limits_W f=-18=f(3,3)$, $\sup\limits_W f=\frac{64}{27}=f(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$

1b$\dot{\text{z}}$) $\inf\limits_W f=-150=f(5,5)$, $\sup\limits_W f=350=f(-5,-5)$

1c) $\inf\limits_W f=0=f(0,0)$, $\sup\limits_W f=32=f(2,4)=f(-2,4)$

1c$\dot{\text{z}}$) $\inf\limits_W f=0=f(0,0)$, $\sup\limits_W f=97=f(3,7)$

2a) $\inf\limits_D f=-96=f(4,4)$, $\sup\limits_D f=\frac{8}{27}=f(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

2b) $\inf\limits_D f=0$, $\sup\limits_D f=160=f(4,4)$

2c) $\inf\limits_D f=-\infty$, $\sup\limits_D f=4\ln 2$

2d) $\inf\limits_D f=0$, $\sup\limits_D f=2\ln 7$

4. $(3,2,0)$