Analiza matematyczna 3.

Wskazówki i rozwiązania niektórych podpunktów zadania 3 z Listy 7.

3. Wyznacz wartość najmniejszą i największą funkcji przy podanych warunkach.

a) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2y - 3$

Rozwiązanie. Ponieważ $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2y - 3 = 2x^2 + (y+1)^2 - 4$, więc $\inf\limits_{\mathbb{R}^2} f = 2\cdot 0^2 + 0^2 - 4 = f(0,-1) = -4$ oraz $\sup\limits_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$, bo $f(n,0) = 2n^2 - 3 \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

a") $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2y - 3$ gdy $x^2 + y^2 \le 4$

Rozwiązanie. Niech $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$ i $W = \{(x,y) : g(x,y) \le 0\}$.
0^o. W jest kołem, czyli zbiorem ograniczonym i domkniętym, więc z tw. Weierstrassa f osiąga kresy na W.

1^o. Punkty kryt. we wnętrzu W:
$\begin{cases} 4x = 0 \\ 2y+2 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$ i ten punkt $p_1 = (0,-1)$ leży w wnętrzu koła W.

2^o. Punkty kryt. na brzegu W (tu $\nabla g = [2x, 2y] \neq \vec{0}$, więc stosujemy mnożn. L.):

$$\begin{cases} 4x = \lambda \cdot 2x \\ 2y+2 = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{cases} x = 0 \\ 0^2 + y^2 = 4 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} \lambda = 2 \\ 2y + 2 = 2 \cdot 2y \\ \ldots \end{cases} \right) \Rightarrow \left(\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 2 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} y = 1 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases} \right)$$

Stąd na brzegu W są 4 p. kryt.: $p_2 = (0,2)$, $p_3 = (0,-2)$, $p_4 = (\sqrt{3},1)$, $p_5 = (-\sqrt{3},1)$.

3^o Z $0^o, 1^o, 2^o$, wśród wartości f w 5 p. kryt. znajdziemy w. najw. i najmniejszą:

$$f(0,-1) = \underset{\inf f[W]}{-4}, \; f(0,2) = 5, \; f(0,-2) = -3, \; f(\sqrt{3},1) = \underset{\sup f[W]}{6} = f(-\sqrt{3},1).$$

b) $f(x,y) = x^3 + x^2 + y^2/3$ gdy $x^2 + y^2 \le 36$

Wsk.: Punkty krytyczne na okręgu: $(\pm 6, 0), (0, \pm 6), (-\frac{4}{9}, \pm\frac{10\sqrt{29}}{9})$.

d) $f(x,y) = 16 - x^2 - 4y^2$ gdy $x^4 + 2y^4 \le 1$

Wsk.: Punkty krytyczne na brzegu: $(\pm 1, 0), (0, \pm\frac{1}{2^{1/4}}), (\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}), (\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$.

e) $f(x,y) = xy$ gdy $x^2 + y^2 = 32$

Rozwiązanie. Warunek opisuje okrąg $W = \{(x,y) : x^2 + y^2 - 32 = 0\}$, czyli zbiór ograniczony i domknięty, więc z tw. Weierstrassa $f|_W$ osiąga swe kresy. Wnętrze W jest puste. Gradient warunku $[2x, 2y] \neq \vec{0}$ na W, więc zastosujemy mnożniki L.:

$$\begin{cases} y = \lambda \cdot 2x \\ x = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 32 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 0^2 + 0^2 = 32 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} \lambda = \frac{y}{2x} \\ x = \frac{y}{2x} \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 32 \end{cases} \right) \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ 2x^2 = 32 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{cases} x = 4 \\ y = \pm 4 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x = -4 \\ y = \pm 4 \end{cases} \right)$$

Stąd mamy cztery p.kryt.: (4,4), (4,−4), (−4,4), (−4,−4).

Odp.: $\inf f[W] = -16 = f(4,-4) = f(-4,4)$, $\sup f[W] = 16 = f(4,4) = f(-4,-4)$.

f) $f(x,y)=4x^2+y^3+3y+7$ gdy $2x^2+\frac{3}{2}y^2=\frac{3}{2}$

ODP. $\inf\{f(x,y): 2x^2+\frac{3}{2}y^2=\frac{3}{2}\}=-4=f(0,-1)$,
$\sup\{f(x,y): 2x^2+\frac{3}{2}y^2=\frac{3}{2}\}=4=f(0,1)$.

g") WSK. badać najpierw funkcję $\hat{f}(x,y)=x^2+y^4$. $\inf f|_{x^2+y^3=1}=f(\pm\frac{\sqrt{37}}{8},\frac{3}{4})$

h) $f(x,y)=x^2+(y+1)^2+3$ gdy $x^2+y^2=\pi$

Rozwiązanie. Dla punktów okręgu mamy: $f(x,y)=x^2+(y+1)^2+3=2y+4+\pi$ i $-\sqrt{\pi}\le y\le\sqrt{\pi}$, więc $\inf\limits_{x^2+y^2=\pi} f=-2\sqrt{\pi}+4+\pi=f(0,-\sqrt{\pi})$, $\sup\limits_{x^2+y^2=\pi} f=2\sqrt{\pi}+4+\pi=f(0,\sqrt{\pi})$.

p) $f(x,y,z)=x+y+3z$ gdy $x^2+y^2=1$ i $x-y+z=1$

WSK. p. kryt. $(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}},\frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}})$, $(\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}})$

p") $f(x,y,z)=x+y+3z$ gdy $x^2+y^2=z^2$ i $x-y+z=1$

WSK. p. kryt. $(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(2,-\frac{3}{2},-\frac{5}{2})$

r) $f(x,y,z)=xyz$ gdy $x^2+y^2+z^2=1$, $x+y+z=0$

Rozwiązanie. Warunki opisują okrąg W (przecięcie sfery i płaszczyzny), czyli zbiór zwarty, więc z tw. Weierstrassa $f|_W$ osiąga swe kresy. Gradienty warunków: $[2x,2y,2z]$, $[1,1,1]$ są liniowo zależne tylko gdy $x=y=z$, a takich punktów nie ma w W. Zatem można użyć metody mnożników Lagrange'a:

$$\begin{cases} yz=\lambda 2x+\mu \\ xz=\lambda 2y+\mu \\ xy=\lambda 2z+\mu \\ x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z(x-y)=\lambda 2(y-x) \\ x(y-z)=\lambda 2(z-y) \\ x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{cases} x=y \\ x+x+z=0 \\ 2x^2+(-2x)^2=1 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} \lambda=-\frac{z}{2} \\ x(y-z)=(-\frac{z}{2})2(z-y) \\ \dots \\ \dots \end{cases} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{cases} x=y \\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{6}} \\ z=-2x \end{cases} \text{lub} \begin{cases} y=z \\ \dots \\ \dots \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x=z \\ \dots \\ \dots \end{cases} \right)$$, czyli mamy 6 p. krytycznych, dla których:

$f(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}})=f(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})=f(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})=-\frac{2}{6\sqrt{6}}=\inf\limits_W f$,
$f(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})=f(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}})=f(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}})=\frac{2}{6\sqrt{6}}=\sup\limits_W f$.

r') $f(x,y,z)=xyz$ gdy $xy+yz+xz=-\frac{1}{2}$, $x+y+z=0$

Rozwiązanie. Ponieważ $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)$, więc zad.r' = zad.r.

t) $f(x,y,z)=y^3+xz^2 \quad$ gdy $\quad x^2+y^2+z^2=1$

Rozwiązanie. Warunek opisuje sferę W, czyli zbiór ograniczony i domknięty, więc z tw. Weierstrassa f osiąga kresy na W w pewnych punktach spełniających układ:

$$\begin{cases} z^2=\lambda 2x \\ 3y^2=\lambda 2y \\ 2xz=\lambda 2z \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \overset{\text{analizując}\\ \text{II i III równ.}}{\quad} \left(\begin{cases} y=0 \\ z=0 \text{ lub } x=\lambda \\ \dots \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} \lambda=\frac{3}{2}y \\ z=0 \text{ lub } x=\frac{3}{2}y \\ \dots \end{cases} \right)$$

$$\left(\begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ x=\pm 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} y=0 \\ z^2=2x^2 \\ 3x^2=1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} \lambda=\frac{3}{2}y \\ z=0 \\ 0^2=3yx \\ \dots \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} \lambda=\frac{3}{2}y \\ x=\frac{3}{2}y \\ z^2=\frac{3}{2}y\cdot 2(\frac{3}{2}y) \\ \frac{9}{4}y^2+y^2+\frac{9}{2}y^2=1 \end{cases} \right) \text{ skąd}$$

$$\left(\begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ x=\pm 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} y=0 \\ z=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ x=\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \text{lub } \begin{cases} y=0 \\ z=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ x=-\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} z=0 \\ x=0 \\ y=\pm 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} z=0 \\ y=0 \\ x=\pm 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x=\frac{3}{\sqrt{31}} \\ z=\pm\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{31}} \\ y=\frac{2}{\sqrt{31}} \end{cases} \text{lub } \begin{cases} x=\frac{-3}{\sqrt{31}} \\ z=\pm\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{31}} \\ y=\frac{-2}{\sqrt{31}} \end{cases} \right)$$

Dalej wystarczy porównać wartości f w tych $\underline{12}$ punktach. Mamy:

$$f(\pm 1,0,0)=0, \quad \left|f(-\tfrac{1}{\sqrt{3}},0,\pm\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})\right| = f(\tfrac{1}{\sqrt{3}},0,\pm\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}) = \tfrac{2}{3\sqrt{3}} < 1, \quad f(0,\pm 1,0)=\pm 1,$$

$$\left|f(\tfrac{-3}{\sqrt{31}},\tfrac{-2}{\sqrt{31}},\pm\tfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{31}})\right| = f(\tfrac{3}{\sqrt{31}},\tfrac{2}{\sqrt{31}},\pm\tfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{31}}) = \tfrac{8}{31\sqrt{31}} + \tfrac{3}{\sqrt{31}}\cdot\tfrac{18}{31} = \tfrac{2}{\sqrt{31}} < 1.$$

Zatem $\inf\limits_W f = -1 = f(0,-1,0)$ i $\sup\limits_W f = 1 = f(0,1,0)$.