

Fantasmagorie?

[Na ćwiczeniach:

wymyśl własne sposoby pisania takich wzorów, jak niżej albo modyfikuj (renewcommand) podany rozkaz rekurencyjny.]

1 Pierwiastkowce

Obrazek (niemal) taki, jak poniższy, widziałem w podręczniku akademickim.

$$A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}}}$$

Ma coś z fraktala; fragment jest ‘podobny’ do całości.

To ‘podobieństwo’ można zakodować:

$$(*) \quad A = \sqrt{2 + A}$$

Toż to równanie, które nietrudno rozwiązać (zrób to!); $A = 2$.

W podręczniku dostrzeżono co innego; rekurencyjną definicję ciągu:

$$(**) \quad A_{n+1} = \sqrt{2 + A_n}, \quad A_1 = 1.$$

W miarę jasne jest, że gdy jest on zbieżny, to jest zbieżny do rozwiązania równania (*), czyli do 2 (czemu nie do -1?). W podręczniku dowodzono (używając indukcji), że jest rosnący i ograniczony, więc jest zbieżny.

Dla Newtona celem były równania (trudniejsze niż (*)), które chciał rozwiązać. Przekształcał równania do (sprytnej) postaci takiej, że mógł zobaczyć rekurencję jak w (**). Obliczał kilka wyrazów (pod jabłonią) i dostawał przybliżenie rozwiązania równania.

Zad. 1. Oblicz B, C

$$B = \sqrt{2+3\sqrt{2+3\sqrt{2+3\sqrt{2+3\sqrt{2+3\sqrt{2+3\sqrt{2+3\dots}}}}}}}$$

$$C = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}}}}}}}$$

$$D = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}}}}}$$

$$E = \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \dots}}}}}}}}$$

[illegible]

$$G = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}^3}^3}^3}^3}^3}^3$$

2 Ułamkowce

Już starożytni dziwili się widząc w ‘przyrodzie’ takie zjawiska:

$$H = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}$$

$$I = \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}}$$

$$J = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}$$

Oczywiście inaczej je pisali. Dziś nazywa się to ułamkami łańcuchowymi. Wiele ciekawego potrafili zobaczyć; np. ‘okresowe’ nieskończone ułamki łańcuchowe są

Zad. 4. Oblicz H , I , J

Zad. 5. Oblicz K , L

Zad. 6. Oblicz M

4

3 Nawiasowce

Dla szósto, siódmoklasisty:

$$N_6 = 6 - (5 - (4 - (3 - (2 - (1))))))$$

$$N_{11} = 11 - (10 - (9 - (8 - (7 - (6 - (5 - (4 - (3 - (2 - (1))))))))))$$

$$N_{12} = 12 - (11 - (10 - (9 - (8 - (7 - (6 - (5 - (4 - (3 - (2 - (1))))))))))$$

$$N_{13} = 13 - (12 - (11 - (10 - (9 - (8 - (7 - (6 - (5 - (4 - (3 - (2 - (1))))))))))$$

Zad. 7. Oblicz N_7 , N_8 , N_9 , N_{10}

Zad. 8. Oblicz N_{123} , N_{124} , N_{125} , N_{126}

Zad. 9. Oblicz N_{2k-1} , N_{2k} , N_{2k+1} , N_{2k+2}

Zad. 10. Oblicz N_m