Algebra liniowa 2 R (konwersatorium 7 o algebrach tensorowych i innych)

Niech K będzie ciałem.

Zadanie 1. Niech V będzie przestrzenią liniową. Dla $m, n \in \mathbf{N}$ zdefiniuj naturalne odwzorowanie dwuliniowe $V^{\otimes n} \times V^{\otimes m} \to V^{\otimes (m+n)}$.

Definicja. K-algebra (łączna, z jedynką) to (niekoniecznie przemienny) pierścień z jedynką A (tzn. zbiór z dodawaniem i mnożeniem, spełniającymi odpowiednie aksjomaty), będący jednocześnie przestrzenią liniową nad K, spełniający aksjomaty zgodności, tzn. dodawanie w A jako pierścieniu jest dodawaniem w A jako przestrzeni liniowej, oraz dla $\alpha, \beta \in K$ i $a, b \in A$:

$$(\alpha a) \cdot (\beta b) = (\alpha\beta) \cdot (ab).$$

Zadanie 2. Niech $T(V) := \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} V^{\otimes n}$. Używając zadania 1 zdefiniuj mnożenie na $T(V)$ i sprawdź, że $T(V)$ jest K-algebrą (nazywamy ją *algebrą tensorową*).

Zadanie 3. Zdefiniuj, czym są morfizmy w kategorii K-algebr (homomorfizmy K-algebr).

Zadanie 4. Sprawdź, że $T(0) \cong K$ i $T(K) \cong K[X]$ (jako K-algebry).

Zadanie 5. Sprawdź, że jeśli $\dim V > 1$, to $T(V)$ jest nieprzemienna.

Zadanie 6. Sprawdź, że $T(V)$ z poprzedniego ma następującą własność uniwersalną: jeśli A jest dowolną K-algebrą i $f : V \to A$ jest K-liniowe, to istnieje jedyny homomorfizm $T(V) \to A$, taki że następujący diagram jest przemienny (gdzie i to naturalne włożenie $V \to T(V)$):

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & T(V) \arrow[d] \\ & A \end{tikzcd}$$

Zadanie 7. Niech I będzie podzbiorem $T(V)$ składającym się z elementów postaci $a \cdot (v \otimes v)$, gdzie $a \in T(V)$ i $v \in V$. Sprawdź, że iloraz $\Lambda(V) := T(V)/I$ (*algebra zewnętrzna*) ma naturalne mnożenie.

Zadanie 8. Przez $\Lambda^k(V)$ oznaczamy podprzestrzeń $V^{\oplus k}/I \leqslant \Lambda(V)$. Zakładając, że $\dim V = n < \infty$, pokaż, że $\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k}$.

$*$ **Zadanie 9.** Zauważ że $V \cong \Lambda^2(V)$ wtedy i tylko wtedy gdy $\dim V = 3$. Spróbuj wymyślić, co to ma wspólnego z tym, że iloczyn wektorowy jest określony tylko w wymiarze 3.

Zadanie 10. Zdefiniuj i udowodnij własność uniwersalną spełnianą przez $\Lambda(V)$.

Zadanie 11. Zauważ, że jeśli $n \in \mathbf{N}$ i $\sigma \in S_n$, to mamy naturalny automorfizm $f_\sigma : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$ zadany przez σ. Zauważ, że $f_\sigma \circ f_\tau = f_{\sigma \circ \tau}$.

Zadanie 12. Mówimy że tensor $t \in V^{\otimes n}$ jest *antysymetryczny*, jeśli $f_\sigma(t) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot t$. Np. $v \otimes w - w \otimes v \in V^{\otimes 2}$ jest tensorem antysymetrycznym.

Zakładając że charakterystyka K jest równa 0 pokaż, że odwzorowanie $\mathrm{Alt}^{(n)} : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$ zadane jako $\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot f_\sigma$ ma następujące własności:

a) jego obraz składa się dokładnie z tensorów antysymetrycznych,
b) tensory antysymetryczne są punktami stałymi,
c) jądro to dokładnie $I \cap V^{\oplus n}$, gdzie I to zbiór z zadania 7.

Zadanie 13. ($\operatorname{char} K = 0$) Niech $\mathrm{Alt} : T(V) \to T(V)$ będzie zadane w oczywisty sposób. Oznaczmy przez $A(V)$ jego obraz.

Uzasadnij, że $A(V)$ z działaniem zadanym przez $t \wedge s := \mathrm{Alt}(t \otimes s)$ jest K-algebrą izomorficzną z $\Lambda(V)$.

Algebra liniowa 2 R (konwersatorium 7 o algebrach tensorowych i innych)

Zadanie 14. Niech Q będzie formą kwadratową na V. Niech $I_Q \leqslant T(V)$ składa się z tensorów postaci $a(v \otimes v - Q(v))$. *Algebra Clifforda* $\mathrm{Cl}(V, Q)$ to iloraz $T(V)/I_Q$.

Sprawdź, że $\mathrm{Cl}(V, Q)$ jest K-algebrą. (Uwaga: dla $Q = 0$ mamy $\mathrm{Cl}(V, Q) = \Lambda(V)$.)

Zadanie 15. (Zakładając że $\operatorname{char} K \neq 2$, jeśli trzeba) sprawdź że $\dim \mathrm{Cl}(V, Q) = \dim \Lambda(V)$, pokazując, że ma analogiczną bazę.

Zadanie 16. Niech $V = \mathbf{R}$ a Q będzie formą sygnatury $(0, 1, 0)$. Pokaż, że $\mathrm{Cl}(V, Q) \cong \mathbf{C}$.

Zadanie 17. Niech $V = \mathbf{R}^2$, a Q będzie formą sygnatury $(0, 2, 0)$. Pokaż, że $\mathrm{Cl}(V, Q)$ jest izomorficzna z kwaternionami.