

Na tej liście  $V$  jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad  $\mathbf{R}$ , a  $\varphi$  — ustaloną symetryczną formą dwuliniową na  $V$ . Macierz  $A$  jest dodatnio określona gdy  $v^\top Av > 0$  dla każdego niezerowego  $v$ , forma  $\varphi$  jest dodatnio określona gdy  $\varphi(v, v) > 0$  dla każdego niezerowego  $v$ . *Dopełnienie ortogonalne* zbioru  $X \subseteq V$  to zbiór  $X^\perp$  wektorów  $v \in V$  takich że  $\forall x \in X (\varphi(v, x) = 0)$ .

**Zadanie 1.** Wyznacz zespolone i rzeczywiste postacie Jordana i bazy jordanowskie macierzy  $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Zadanie 2.** W bazie  $(b_1, b_2)$  przestrzeni  $V$  endomorfizm  $F$  ma macierz  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Uzasadnij, że  $(b_2 + i0, b_1 + ib_2)$  jest bazą  $V_{\mathbf{C}}$  i oblicz macierz  $F_{\mathbf{C}}$  w tej bazie.

**Zadanie 3.** Przekonaj się, że jeśli  $A, B$  są zespolonymi macierzami, a  $v$  zespolonym wektorem takim że  $AB, Av$  mają sens, to  $\overline{AB} = \bar{A} \cdot \bar{B}$  i  $\overline{Av} = \bar{A}\bar{v}$  (tu sprzężenie oznacza sprzężenie wyraz po wyrazie).

**Zadanie 4.** Sprawdź, że jeśli  $B$  jest bazą  $V$  i  $v \in V_{\mathbf{C}}$ , to  $[\bar{v}]_B = \overline{[v]_B}$ .

**Zadanie 5.** Sprawdź że dla dowolnych  $A, B \subseteq V$  zachodzi:

$$\text{a) } A^\perp \leq V, \quad \text{b) } A^\perp = (\text{Lin}A)^\perp, \quad \text{c) } A^\perp \cap B^\perp = (A \cup B)^\perp, \quad \text{d) } A \subseteq (A^\perp)^\perp.$$

**Zadanie 6.** Sprawdź bezpośrednim rachunkiem, że  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$  jest dodatnio określona (tzn. spełnia  $v^\top Av > 0$  dla każdego niezerowego  $v \in \mathbf{R}^2$ ) wtedy i tylko wtedy gdy  $a > 0$  i  $\det A > 0$ . (Wskazówka: wylicz  $\Delta$  dla trójmianu kwadratowego  $ax^2 + 2bxy + dy^2$ , traktując  $y$  jako parametr.)

**Zadanie 7.** Dla  $A \in M_{n \times n}(\mathbf{R})$  uzasadnij, że są równoważne warunki: a) kolumny  $A$  są bazą ortonormalną (tzn. są bazą i spełniają  $v^\top w = 0$  gdy  $v \neq w$  lub  $0$  w p.p.), b)  $A^\top A = I$ , c)  $AA^\top = I$ , d) wiersze  $A$  są bazą ortonormalną.

**Zadanie 8.** Ustalmy  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \in \mathbf{C}[X]$ ,  $F \in \text{End}(V)$ ,  $v \in V_{\mathbf{C}}$ . Uzasadnij, że

$$\overline{P(F_{\mathbf{C}})(v)} = (\bar{a}_0 \text{id}_V + \bar{a}_1 F_{\mathbf{C}} + \dots + \bar{a}_n F_{\mathbf{C}}^n)(\bar{v})$$

i znajdź przykład na to, że  $F_{\mathbf{C}}$  powyżej nie można zastąpić dowolnym  $G \in \text{End}(V_{\mathbf{C}})$ .

**Zadanie 9.** Podaj przykład macierzy  $4 \times 4$  której jedynymi wektorami własnymi są skalarne krotności następujących wektorów:  $(1, 0, 2, 1)^\top$ ,  $(-1, 1, 0, 1)^\top$ . Ile wartości własnych może mieć taka macierz? (Zrób to zadanie nad  $\mathbf{R}$ , jak i nad  $\mathbf{C}$ .)

**Zadanie 10.** Oblicz:

$$\text{a) } \exp \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \exp \left[ t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

**Zadanie 11.** Udowodnij, że jeśli  $A$  jest zespoloną [rzeczywistą] macierzą kwadratową, to istnieje odwracalna zespolona [rzeczywista] macierz  $P$ , taka że  $A^\top = PAP^{-1}$ . [Wsk. najpierw rozwiąż to zadanie dla jednej klatki Jordana.]

**Zadanie 12.** Uzasadnij że jeżeli  $P$  jest macierzą odwracalną, to  $A \in M_{n \times n}(K)$  ma ten sam rząd, co  $PAP^\top$ .

**Zadanie 13.** Uzasadnij że jeżeli  $\varphi$  jest niezerową symetryczną formą dwuliniową, to istnieje taki  $v$  że  $\varphi(v, v) \neq 0$ . (Wskazówka: weź  $v, w$  takie że  $\varphi(v, w) \neq 0$  i rozważ  $\varphi(v + w, v + w)$ .)

**Zadanie 14.**

- Sprawdź że każda macierz  $A \in M_{n \times n}(\mathbf{R})$  przedstawia się jako suma  $A = A_1 + A_2$ , gdzie  $A_1 = A_1^\top$  i  $A_2 = -A_2^\top$ .
- Wynioskuj stąd że każda forma dwuliniowa jest sumą pewnej formy symetrycznej i pewnej formy antysymetrycznej.

**Zadanie 15.** Pokaż że jeżeli  $A$  jest dowolną macierzą o współczynnikach rzeczywistych (niekoniecznie kwadratową), to  $A^T A$  jest dodatnio półokreślona, tzn. związana z nią forma dwuliniowa spełnia  $\varphi(v, v) \geq 0$ .

**Zadanie 16.** Zbiór symetrycznych macierzy  $2 \times 2$  jest przestrzenią liniową. Wyznacz jej wymiar, a następnie naszkicuj jak wygląda podzbiór złożony z macierzy dodatnio określonych.

**Zadanie 17.** Uzasadnij lub obal:

- a) jeżeli macierz  $3 \times 3$  ma dodatnie wyrazy, to jest dodatnio określona,
- b) suma macierzy dodatnio określonych jest dodatnio określona,
- c) iloczyn macierzy dodatnio określonych jest dodatnio określony.

**Zadanie 18.** Podaj przykład symetrycznej formy dwuliniowej  $\varphi$  i dwóch wektorów izotropowych  $v, w$  (tzn. spełniających  $\varphi(v, v) = \varphi(w, w) = 0$ ), takich że  $\varphi(v + w, v + w) \neq 0$ .

**Zadanie 19.** Zbadaj, czy  $\varphi$  jest formą dwuliniową na  $M_{n \times n}(\mathbf{R})$ , a jeżeli tak, rozstrzygnij, czy jest symetryczne, dodatnio określone, gdzie  $\varphi(A, B) =$

- a)  $\text{tr}(AB)$
- b)  $\det(AB)$ ,
- c)  $\text{tr}(AB^T)$
- d)  $\text{tr}(A + B)$ .

**Zadanie 20.** Dla formy dwuliniowej  $\varphi$  piszemy  $q_\varphi(v) = \varphi(v, v)$  ( $q_\varphi$  to forma kwadratowa stowarzyszona z  $\varphi$ ). Załóżmy że  $\varphi$  jest symetryczna. Np. rozwijając  $q_\varphi(v + w, v + w)$ , znajdź wzór pozwalający odzyskać  $\varphi$  z  $q_\varphi$ .

**Zadanie 21.** Podaj przykład przekształcenia liniowego  $\mathbf{R}^3$  w siebie które ma nieskończenie wiele podprzestrzeni niezmienniczych.

**Zadanie 22.** Czy istnieje  $F : V \rightarrow V$ , takie że  $\dim(\sum_{\lambda \in \sigma(F)} V^\lambda) = 2$ , jeśli (a)  $V = \mathbf{R}^4$ ? (b)  $V = \mathbf{R}^5$ ?

**Zadanie 23.** Wykaż, że dla  $A \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$  zachodzi wzór  $\det \exp A = e^{\text{tr} A}$ .

**Zadanie 24.** Oblicz exponens macierzy:  $\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a + bi & 1 \\ 0 & a + bi \end{pmatrix}$ . Porównaj wyniki.

$[a, b \in \mathbf{R}]$

**Zadanie 25.** Znajdź możliwie dużo funkcji  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  spełniających warunki  $f'' = 4f' - 4f$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 3$ .

**Zadanie 26.** Załóżmy że  $v, w \in \mathbf{C}^n$  są niezerowymi wektorami. Udowodnij że istnieje (zespolona) macierz symetryczna  $A$  taka że  $Av = w$ .